А. Я. ХИНЧИН

# ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

1986

А. Я. ХИНЧИН

# ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Л. Я. Цлаф.* Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

А-15805. Подписано к печати 30/XI 1949 г. 7,25 печ. л. 6,13 уч.-изд. л.
33708 тип. зн. в печ. л. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1737.
Цена книги 1 р. 85 к.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее второе издание перепечатано с первого без ущественных изменений.

Со времени первого издания других монографий цепных дробях на русском языке не появилось. Из бщих руководств по теории чисел, содержащих элементарные сведения о цепных дробях, можно упомянуть урсы Д. А. Граве, Б. А. Венкова и И. В. Арнольда.

*А. Хинчин*

Октябрь, 1949 г.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теория цепных (или, как их чаще называют, *непрерывных*) дробей изучает специальный алгоритм, являющийся одним из важнейших орудий анализа, теории вероятностей, механики и в особенности теории чисел. Настоящее элементарное руководство имеет целью ознакомить читателя только с так называемыми *простейшими* цепными дробями вида:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

и притом преимущественно в предположении, что все «элементы» $a_i$ $(i \geqslant 1)$ — целые положительные числа. Этот наиболее важный и вместе с тем наиболее изученный класс цепных дробей лежит в основании почти всех арифметических и весьма многих аналитических приложений теории.

Появление элементарной монографии по теории цепных дробей я считаю необходимым потому, что эта теория, прежде составлявшая один из пунктов математической программы средней школы, в настоящее время из этой программы исключена и потому в новые руководства элементарной алгебры не входит; с другой стороны, программы высшей школы (даже математических отделений университетов) также этой теории не предусматривают, вследствие чего и соответствующие новые руководства для высшей школы, естественно, ничего не говорят о цеп-

ных дробях. И специалист, встречающийся с необходимостью овладеть этим элементарным аппаратом, вынужден разыскивать либо дореволюционные учебники, либо заграничные специальные руководства.

Имея, таким образом, своей основной целью заполнение указанного пробела в нашей учебной литературе, предлагаемая монография по необходимости вынуждена быть элементарной и по возможности доступной; этим в значительной степени предопределяется её *стиль*. *Содержание* её, однако, несколько выходит за пределы того минимума, который является абсолютно необходимым для всяких приложений. Это относится прежде всего ко всей последней главе, содержащей основания метрической (или вероятностной) теории цепных дробей—важной новой главе, созданной почти целиком советскими учёными; это относится затем к целому ряду мест во второй главе, где я пытался, насколько это возможно в столь элементарных рамках, оттенить основоположную роль аппарата цепных дробей при изучении арифметической природы иррациональностей. Я полагал, что раз уже издаются в виде отдельной монографии основы теории цепных дробей, было бы жаль оставить без упоминания те моменты и связи этой теории, которые наиболее занимают современную научную мысль.

Что касается расположения материала, то здесь нуждается в пояснении только выделение в особую предварительную главу «формальной» части учения, т. е. в основном той его части, где элементы цепных дробей предполагаются любыми положительными (не обязательно целыми) числами, а часто и ещё общее—просто независимыми переменными. Недостатком такого выделения является то, что формальные свойства изучаемого аппарата преподносятся читателю раньше его предметного содержания—и потому в отрыве от этого содержания,—что в педагогическом отношении, несомненно, представляется нежелательным.

Однако, не говоря уже о том, что этим путём достигается бóльшая методологическая чёткость (ибо читатель непосредственно видит, какие свойства цепных дробей вытекают из самой структуры аппарата и какие имеют

место лишь в предположении целых положительных элементов), такое предваряющее выделение формальной части позволяет в дальнейшем развивать арифметическую теорию, составляющую подлинный предмет всего учения, на готовой формальной базе, а потому и сосредоточивать всё внимание читателя на предметном содержании излагаемого материала, не отвлекая его в сторону чисто формальными рассмотрениями.

*А. Хинчин*

Москва, 12 февраля 1935 г

ГЛАВА I

# СВОЙСТВА АППАРАТА

## § 1. Введение

Простейшей цепной дробью называется выражение вида:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \tag{1}$$

Буквы $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots$ при наиболее общем подходе к предмету означают здесь независимые переменные; в зависимости от специальных надобностей эти переменные можно заставить пробегать значения той или иной области. Так, можно считать $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots$ вещественными или комплексными числами, или функциями одной или нескольких переменных, и т. п. В соответствии с целями настоящей книги мы будем всегда считать $a_1$, $a_2$, ... *положительными числами*; $a_0$ может быть *любым вещественным числом.* Эти числа мы будем называть *элементами* данной цепной дроби. Число элементов может быть либо конечным, либо бесконечным. В первом случае мы будем записывать данную цепную дробь в виде:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{2}$$

и называть *конечной* цепной дробью, точнее — *n-членной* цепной дробью (так что $n$-членная цепная дробь имеет

$n+1$ элементов); во втором случае мы запишем цепную дробь в виде (1) и будем называть *бесконечной* цепной дробью.

Всякая конечная цепная дробь представляет собою результат конечного числа рациональных действий над ее элементами; в наших предположениях об элементах поэтому всякая конечная цепная дробь выражает собою некоторое вещественное число; если, в частности, все элементы такой дроби — числа рациональные, то и сама дробь выражает собою рациональное число.

Напротив, бесконечной цепной дроби мы непосредственно не можем приписать никакого числового значения; она представляет собою, по крайней мере впредь до дальнейших соглашений, лишь формальную запись, подобно бесконечному ряду, о сходимости которого не ставится вопроса. Тем не менее, она может, конечно, быть предметом математического исследования.

Условимся в целях технического удобства писать в дальнейшем бесконечную цепную дробь (1) в виде:

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots], \tag{3}$$

а конечную цепную дробь (2) в виде:

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]; \tag{4}$$

таким образом число членов конечной цепной дроби равно числу символов (элементов), стоящих после точки с запятой.

Условимся называть цепную дробь

$$s_k=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k],$$

где $0\leqslant k\leqslant n$, *отрезком* цепной дроби (4); равным образом при любом $k\geqslant 0$ мы назовем $s_k$ отрезком бесконечной цепной дроби (3). Очевидно, что любой отрезок любой (конечной или бесконечной) цепной дроби есть конечная цепная дробь.

Условимся, далее, называть цепную дробь

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_n]$$

*остатком* конечной цепной дроби (4); подобным же образом цепную дробь

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]$$

мы будем называть остатком бесконечной цепной дроби (3). Очевидно, что все остатки конечной цепной дроби — также конечные дроби, все же остатки бесконечной цепной дроби — также бесконечные цепные дроби.

Для конечных цепных дробей, как это вытекает из самого их определения, имеет место соотношение:

$$[a_0;\ a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \ (0 \leqslant k \leqslant n). \quad (5)$$

Аналогичное соотношение

$$[a_0;\ a_1, a_2, \ldots] = [a_0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (k \geqslant 0)$$

для бесконечных цепных дробей может иметь смысл лишь (тривиальной) формальной записи, так как элемент $r_k$ в правой части этого равенства, будучи бесконечной цепной дробью, не имеет никакого определённого числового значения.

## § 2. Подходящие дроби

Всякая конечная цепная дробь

$$[a_0;\ a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

как результат конечного числа рациональных действий над её элементами есть рациональная функция этих элементов и, следовательно, может быть представлена как отношение двух многочленов

$$\frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}$$

относительно $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с целыми коэфициентами. Если элементы получают числовые значения, то тем самым данная цепная дробь представляется в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$. Однако такое представление, разумеется, не является единственным. Для всего последующего нам важно иметь некоторое *определённое* представление конечной цепной дроби в виде простой дроби — представление, которое мы будем называть *каноническим*. Это представление мы определим посредством индукции.

Для нуль-членной цепной дроби

$$[a_0]=a_0$$

мы в качестве канонического представления принимаем дробь $\frac{a_0}{1}$. Пусть теперь канонические представления определены для цепных дробей, число членов которых менее $n$. В $n$-членной дроби $[a_0;\ a_1, \ldots, a_n]$ мы можем положить согласно формуле (5)

$$[a_0;\ a_1, \ldots, a_n]=[a_0;\ r_1]=a_0+\frac{1}{r_1}\ ;$$

здесь

$$r_1=[a_1;\ a_2, \ldots, a_n]$$

есть $n-1$-членная цепная дробь, для которой, следовательно, каноническое представление уже определено; пусть оно имеет вид:

$$r_1=\frac{p'}{q'}\ ;$$

тогда

$$[a_0;\ a_1, \ldots, a_n]=a_0+\frac{q'}{p'}=\frac{a_0p'+q'}{p'}\ ;$$

эту последнюю дробь мы и примем за каноническое представление цепной дроби $[a_0;\ a_1, \ldots, a_n]$; таким образом, полагая

$$[a_0;\ a_1, \ldots, a_n]=\frac{p}{q}\ ,$$

$$r_1=[a_1;\ a_2, \ldots, a_n]=\frac{p'}{q'}\ ,$$

мы для числителей и знаменателей этих канонических представлений имеем соотношения:

$$p=a_0p'+q',\quad q=p'. \tag{6}$$

Вместе с тем мы видим, что канонические представления нами теперь однозначно определены для конечных цепных дробей с любым числом членов.

В теории цепных дробей особо важную роль играют канонические представления отрезков данной (конечной

или бесконечной) цепной дроби $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \ldots]$; каноническое представление отрезка

$$s_k=[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

этой дроби мы будем обозначать через $\frac{p_k}{q_k}$ и называть *подходящей дробью порядка* $k$ данной цепной дроби $\alpha$. Понятие это определяется совершенно одинаково для конечных и бесконечных цепных дробей $\alpha$; разница лишь в том, что конечная цепная дробь имеет конечное число подходящих дробей, а бесконечная имеет их бесчисленное множество. Для $n$-членной цепной дроби $\alpha$, очевидно,

$$\frac{p_n}{q_n}=\alpha;$$

такая цепная дробь имеет всего $n+1$ подходящих дробей (порядков 0, 1, 2, ..., $n$).

Теорема 1. (Закон образования подходящих дробей.) *Для любого* $k \geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned} p_k&=a_k p_{k-1}+p_{k-2}, \\ q_k&=a_k q_{k-1}+q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

*Доказательство.* В случае $k=2$ формулы (7) легко проверяются непосредственно. Допустим, что они верны для всех $k<n$; рассмотрим цепную дробь

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

и будем обозначать через $\frac{p'_r}{q'_r}$ её подходящие дроби порядка $r$; в силу формул (6)

$$\begin{aligned} p_n&=a_0 p'_{n-1}+q'_{n-1}, \\ q_n&=p'_{n-1}, \end{aligned}$$

а та́к как по нашему допущению

$$\begin{aligned} p'_{n-1}&=a_n p'_{n-2}+p'_{n-3}, \\ q'_{n-1}&=a_n q'_{n-2}+q'_{n-3} \end{aligned}$$

(здесь стоит $a_n$, а не $a_{n-1}$, так как дробь $[a_1; a_2, \ldots, a_n]$ начинается с $a_1$, а не с $a_0$), то в силу формул (6)

$$p_n = a_0 (a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q_{n-3}) =$$
$$= a_n (a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q_{n-3}) =$$
$$= a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_n = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

ч. и т. д.

Установленные нами рекуррентные формулы (7), выражающие числитель и знаменатель подходящей дроби порядка $n$ через элемент $a_n$ и через числители и знаменатели двух предшествующих подходящих дробей, служат формальной основой всей теории цепных дробей.

Примечание. Иногда удобно бывает вводить в рассмотрение также подходящую дробь порядка $-1$, причём полагают $p_{-1}=1$ и $q_{-1}=0$. Очевидно, при этом соглашении (и только при этом соглашении) формулы (7) сохраняют силу и для $k=1$.

Теорема 2. *Для всех* $k \geqslant 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{8}$$

*Доказательство.* Умножая формулы (7) соответственно на $q_{k-1}$ и $p_{k-1}$ и вычитая затем первую из второй, мы находим:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

а так как

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1,$$

то теорема доказана.

Следствие. *Для всех* $k \geqslant 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Для всех* $k \geqslant 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

*Доказательство.* Умножая формулы (7) соответственно на $q_{k-2}$ и $p_{k-2}$ и вычитая затем первую из второй,

мы находим в силу теоремы 2:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

ч. и т. д.

Следствие. Для всех $k \geqslant 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}. \tag{10}$$

Полученный ряд простых результатов позволяет нам легко сделать весьма важные заключения о взаимном расположении подходящих дробей данной цепной дроби. В самом деле, равенство (10) показывает, что подходящие дроби чётных порядков образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечётных порядков — убывающую последовательность, так что эти две последовательности идут друг другу навстречу (всё это, разумеется, при сделанном нами предположении о положительности всех элементов, начиная с $a_1$). Так как в силу равенства (9) каждая дробь нечётного порядка больше дроби непосредственно следующего четного порядка, то, очевидно, и любая подходящая дробь нечётного порядка должна быть больше любой подходящей дроби чётного порядка, и мы приходим к следующему заключению:

Теорема 4. Подходящие дроби чётного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечётного порядка — убывающую последовательность. При этом любая подходящая дробь нечётного порядка больше любой подходящей дроби чётного порядка.

Очевидно, в частности, что для конечной цепной дроби $\alpha$ всякая подходящая дробь чётного порядка меньше $\alpha$, а всякая подходящая дробь нечётного порядка больше $\alpha$ (исключение составляет, разумеется, последняя подходящая дробь, равная $\alpha$).

Мы закончим настоящий параграф доказательством двух простых, но крайне важных предложений, касающихся числителей и знаменателей подходящих дробей.

Теорема 5. *Для любого* $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} \qquad (11)$$

(здесь $p_i$, $q_i$, $r_i$ относятся к цепной дроби, стоящей в левой части равенства).

*Доказательство.* В силу формулы (5)

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k].$$

Цепная дробь, стоящая в правой части этого равенства, очевидно, имеет в качестве подходящей дроби порядка $k-1$ дробь $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$; подходящая же её дробь порядка $k$, $\frac{p_k}{q_k}$, равна ей самой, а так как по формулам (7)

$$p_k = p_{k-1}\, r_k + p_{k-2}, \qquad q_k = q_{k-1}\, r_k + q_{k-2},$$

то теорема доказана.

Теорема 6. *Для любого* $k \geqslant 1$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

*Доказательство.* Для $k=1$ это соотношение очевидно, так как оно получает вид:

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1;$$

пусть $k > 1$, и пусть уже доказано, что

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1]; \qquad (12)$$

в силу соотношения (7)

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

мы имеем:

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right],$$

а отсюда в силу формул (5) и (12):

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1],$$

ч. и т. д.

## § 3. Бесконечные цепные дроби

Каждой бесконечной цепной дроби

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] \tag{13}$$

соответствует бесконечная последовательность подходящих дробей

$$\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \frac{p_k}{q_k},\ \ldots \tag{14}$$

Каждая подходящая дробь есть некоторое вещественное число; в случае, если последовательность (14) сходится, т. е. имеет единственный определённый предел $\alpha$, естественно считать это число $\alpha$ «значением» цепной дроби (13) и писать:

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots].$$

Сама цепная дробь (13) в этом случае называется *сходящейся*; если же последовательность (14) определённого предела не имеет, то мы называем цепную дробь (13) *расходящейся*.

Сходящиеся бесконечные цепные дроби по своим свойствам во многом аналогичны конечным цепным дробям. Основным их свойством, позволяющим весьма далеко провести эту аналогию, является следующее предложение.

Теорема 7. *Если бесконечная цепная дробь* (13) *сходится, то сходятся и все её остатки; обратно, если хоть один из остатков цепной дроби* (13) *сходится, то сходится и сама эта цепная дробь.*

*Доказательство.* Условимся обозначать через $\frac{p_k}{q_k}$ подходящие дроби данной цепной дроби (13) и через $\frac{p'_k}{q'_k}$ — подходящие дроби какого-либо из её остатков, например $r_n$.

На основании формулы (11) мы, очевидно, будем иметь:

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+k}]=\frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+q_{n-2}}\ (k=0,1,\ldots).\ (15)$$

Отсюда непосредственно следует, что если сходится остаток $r_n$, т. е. если дробь $\frac{p'_k}{q'_k}$ при $k\to\infty$ стремится к пределу, который мы также будем обозначать через $r_n$, то дробь $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ при этом также стремится к пределу $\alpha$, который равен

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}};\qquad (16)$$

разрешая же соотношение (15) относительно $\frac{p'_k}{q'_k}$, мы совершенно таким же путём убеждаемся в справедливости и обратного заключения, чем и завершается доказательство теоремы 7.

Заметим, что установленная нами для сходящихся бесконечных цепных дробей формула (16) совершенно аналогична формуле (11), доказанной нами ранее для конечных цепных дробей; таким образом для сходящихся бесконечных цепных дробей имеет место теорема, аналогичная теореме 5 для конечных цепных дробей.

Для сходящихся бесконечных цепных дробей из теоремы 4 предыдущего параграфа, очевидно, вытекает следующее предложение.

Теорема 8. *Значение сходящейся бесконечной цепной дроби более любой подходящей дроби чётного порядка и менее любой подходящей дроби нечётного порядка.*

Далее, следствие теоремы 2 предыдущего параграфа приводит нас в силу теоремы 8 к следующему результату, играющему основную роль в арифметических приложениях теории цепных дробей.

Теорема 9. *Значение $\alpha$ сходящейся бесконечной цепной дроби* (13) *при любом* $k \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству*[1]):

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Очевидно, теорема 9 имеет место и для конечной цепной дроби

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

при всех $k < n$, причём только для случая $k = n-1$ неравенство заменяется равенством, так как $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

Если $\alpha$ есть значение сходящейся бесконечной цепной дроби (13), то элементы этой дроби мы будем во всём дальнейшем называть также *элементами числа* $\alpha$; подобным же образом подходящие дроби, отрезки и остатки цепной дроби (13) мы будем называть соответственно подходящими дробями, отрезками и остатками числа $\alpha$. В силу теоремы 7 все остатки сходящейся бесконечной цепной дроби (13) имеют определённые вещественные значения.

Для бесконечных дробей может быть естественно поставлен вопрос о признаках сходимости, подобно тому как он ставится для бесконечных рядов; в рассматриваемом нами случае, т. е. когда $a_i > 0$ для $i \geqslant 1$, можно указать чрезвычайно простой и удобный признак сходимости.

Теорема 10. *Для сходимости цепной дроби* (13) *необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (17)$$

*был расходящимся.*

*Доказательство.* Очевидно в силу теоремы 4, что для сходимости бесконечной цепной дроби необходимо

[1]) Заметим, что в наших предположениях $q_k > 0$ для всех $k \geqslant 0$, ибо $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, а отсюда в силу второй из формул (7) мы посредством индукции находим $q_k > 0$ и для всех $k > 1$.

и достаточно, чтобы те две последовательности, о которых идёт речь в этой теореме, имели один и тот же предел (существование предела для каждой отдельной последовательности вытекает, разумеется, из теоремы 4 во всех случаях). А это, как показывает формула (9), имеет место тогда и только тогда, если

$$q_k q_{k+1} \to \infty \qquad (k \to \infty). \qquad (18)$$

Условие (18), таким образом, необходимо и достаточно для сходимости данной цепной дроби.

Пусть ряд (17) сходится; в силу второй из формул (7)

$$q_k > q_{k-2} \qquad (k \geqslant 1).$$

Поэтому для любого $k$ мы имеем либо $q_k > q_{k-1}$, либо $q_{k-1} > q_{k-2}$. В первом случае вторая из формул (7) даёт:

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

а отсюда при достаточно больших $k$ [когда $a_k < 1$, что в силу сходимости ряда (17) должно иметь место при $k \geqslant k_0$],

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1-a_k};$$

во втором случае та же формула даёт при $a_k < 1$:

$$q_k < (1+a_k)\, q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1-a_k};$$

таким образом для всех $k \geqslant k_0$ мы имеем:

$$q_k < \frac{1}{1-a_k} q_l,$$

где $l < k$; если $l \geqslant k_0$, то к $q_l$ можно применить то же неравенство; продолжая эти рассуждения, мы, очевидно, придём к неравенству:

$$q_k < \frac{q_s}{(1-a_k)(1-a_l)\dots(1-a_r)}, \qquad (19)$$

где $k > l > \dots > r \geqslant k_0$ и $s < k_0$. Но в силу предположенной сходимости ряда (17) бесконечное произведение

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n),$$

как известно, сходится, т. е. имеет положительное значение, которое мы обозначим через $\lambda$. Очевидно,

$$(1-a_k)(1-a_l)\ldots(1-a_r) \geqslant \prod_{n=k_0}^{k}(1-a_n)=\lambda;$$

поэтому, обозначая через $Q$ наибольшее из чисел $q_0, q_1, \ldots$ $\ldots, q_{k_0-1}$, мы из неравенства (19) можем заключить:

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \qquad (k \geqslant k_0),$$

следовательно,

$$q_{k+1}q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \qquad (k \geqslant k_0),$$

и соотношение (18) не может иметь места, а следовательно, данная цепная дробь расходится.

Пусть теперь ряд (17) расходится. Так как $q_k > q_{k-2}$ для всех $k \geqslant 2$, то, обозначая через $c$ наименьшее из чисел $q_0, q_1$, мы для любого $k \geqslant 0$ будем иметь $q_k \geqslant c$; поэтому вторая из формул (7) даёт нам:

$$q_k \geqslant q_{k-2} + ca_k \qquad (k \geqslant 2).$$

Последовательное применение этого неравенства даёт нам:

$$q_{2k} \geqslant q_0 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n}$$

и

$$q_{2k+1} \geqslant q_1 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n+1},$$

откуда

$$q_{2k} + q_{2k+1} > q_0 + q_1 + c\sum_{n=1}^{2k+1} a_n;$$

иначе говоря, для всех $k$

$$q_k + q_{k-1} > c\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Мы доказали выше это неравенство для нечетных $k$, однако очевидно, что тем же путём оно устанавливается и для чётных $k$.

Но отсюда следует, что в произведении $q_k q_{k-1}$ по меньшей мере один из сомножителей превышает $\frac{c}{2}\sum_{n=1}^{k} a_n$, а так как другой множитель во всяком случае не меньше, чем $c$, то мы получаем:

$$q_k q_{k-1} > \frac{c^2}{2}\sum_{n=1}^{k} a_n;$$

в силу предположенной расходимости ряда (17) отсюда следует соотношение (18), а следовательно, сходимость данной цепной дроби. Этим теорема 10 доказана полностью.

## § 4. Цепные дроби с натуральными элементами

Начиная с настоящего параграфа и до конца книги, мы будем предполагать элементы $a_1$, $a_2$, ... данной цепной дроби *натуральными*, т. е. целыми положительными числами. Что касается $a_0$, то оно — также целое число, но не обязательно положительное.

Если такая цепная дробь бесконечна, то на основании теоремы 10 она всегда сходится. Поэтому мы впредь без всяких оговорок можем считать любую бесконечную цепную дробь сходящейся и говорить о её «значении» или «величине».

Если такая цепная дробь конечна и если последний её элемент $a_n = 1$, то, очевидно, $r_{n-1} = a_{n-1} + 1$ есть целое число; таким образом в этом случае мы данную $n$-членную дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$ можем написать и в виде $n-1$-членной дроби $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}+1]$, причём в этом новом виде последний элемент заведомо больше единицы.

Благодаря этому замечанию мы можем во всём дальнейшем исключить из рассмотрения конечные цепные дроби, последние элементы которых равны единице

(за исключением, конечно, нуль-членной дроби [1]). Это замечание играет важную роль в вопросе о единственности представления чисел цепными дробями (см. гл. II, § 5).

Очевидно, что числители и знаменатели подходящих дробей в рассматриваемом нами теперь случае — числа целые [для $p_{-1}$, $q_{-1}$, $p_0$, $q_0$ это видно непосредственно, а для остальных следует из формул (7)]. Кроме того, мы имеем следующее весьма важное предложение.

Теорема 11. *Все подходящие дроби несократимы.* Доказательство непосредственно вытекает из формулы (8), так как всякий общий делитель чисел $p_n$ и $q_n$ является вместе с тем делителем выражения $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$.

Вторая из формул (7) показывает, что для всякого $k \geqslant 2$, $q_k > q_{k-1}$; таким образом последовательность

$$q_1, q_2, \ldots, q_k \ldots,$$

всегда возрастающая. Мы можем высказать о порядке роста чисел $q_k$ и значительно более сильное предложение.

Теорема 12. *Для любого*[1]) $k \geqslant 2$

$$q_k \geqslant 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

*Доказательство.* При $k \geqslant 2$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geqslant q_{k-1} + q_{k-2} \geqslant 2q_{k-2};$$

последовательное применение этого неравенства даёт:

$$q_{2k} \geqslant 2^k q_0 = 2^k, \qquad q_{2k+1} \geqslant 2^k q_1 \geqslant 2^k;$$

эти неравенства, очевидно, доказывают теорему.

Таким образом знаменатели подходящих дробей возрастают не медленнее, чем по закону геометрической прогрессии.

---

[1]) Здесь и всюду в дальнейшем надо, конечно, подразумевать в случае *конечной* цепной дроби только те значения $k$, для которых $q_k$ имеет смысл.

*Промежуточные дроби.* Пусть $k \geqslant 2$ и $i$ — любое неотрицательное целое число. Разность

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}},$$

равная, как легко убедиться,

$$\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]},$$

имеет для всех $i \geqslant 0$ один и тот же знак, зависящий только от чётности или нечётности $k$. Отсюда следует, что дроби

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \quad \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \quad \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \qquad (20)$$

образуют при чётном $k$ возрастающую, а при нечётном $k$ — убывающую последовательность (см. теорему 4). Крайние члены этой последовательности — подходящие дроби одинаковой чётности; промежуточные между ними члены (если таковые имеются, т. е. если $a_k > 1$) мы будем называть *промежуточными дробями*. В арифметических приложениях эти промежуточные дроби играют значительную роль, хотя и не столь большую, как подходящие дроби. Для лучшего уяснения их взаимного расположения и закона их последовательного образования целесообразно ввести понятие так называемой *медианты* двух дробей.

Медиантою двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ с положительными знаменателями называется дробь

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Лемма. *Медианта двух дробей всегда заключена между ними по величине.*

*Доказательство.* Пусть для определённости $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$; тогда $bc - ad \geqslant 0$, и, следовательно,

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqslant 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \leqslant 0,$$

ч. и т. д.

Мы непосредственно видим, что каждая из промежуточных дробей ряда (20) является медиантою предшествующей дроби и дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, продвигаясь в ряду (20), мы, таким образом, путём последовательного образования медиант продвигаемся от подходящей дроби $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ по направлению к подходящей дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$; заключительным шагом этого продвижения является тот, когда построенная медианта совпадает с $\frac{p_k}{q_k}$; эта последняя дробь заключена, таким образом, между $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, что мы уже знаем из теоремы 4. Мы знаем также, что значение $\alpha$ данной цепной дроби заключено между $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$ и что дроби $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$, порядки которых оба чётные или оба нечётные, расположены по одну и ту же сторону числа $\alpha$. Отсюда следует, что весь ряд (20) расположен по одну сторону числа $\alpha$, дробь же $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ — по другую его сторону. В частности, дроби $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ всегда расположены по разные стороны $\alpha$. Иначе говоря, *величина цепной дроби всегда заключена между любой подходящей дробью и медиантой, образованной этой дробью и предшествующей.* (Мы рекомендуем читателю сделать себе схематический чертёж, рисующий взаимное расположение всех этих чисел.)

Это замечание даёт простой способ, с помощью которого можно, зная подходящие дроби $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, построить следующую подходящую дробь $\frac{p_k}{q_k}$, не зная эле-

мента $a_k$ (но пользуясь зато знанием величины $\alpha$ цепной дроби). В самом деле, строим сначала медианту двух данных дробей, затем медианту этой медианты с $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и т. д., всякий раз строя медианту только что полученной медианты и дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$; мы уже знаем, что эти последовательные медианты будут вначале приближаться к $\alpha$; *последняя медианта этого ряда, лежащая от $\alpha$ по ту же сторону, что и исходная дробь $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, и есть $\frac{p_k}{q_k}$*. В самом деле, мы уже знаем, что $\frac{p_k}{q_k}$ среди этих медиант найдётся и будет лежать от $\alpha$ по ту же сторону, что и $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$; нам остаётся поэтому показать только, что следующая медианта будет лежать уже по другую сторону $\alpha$; но следующая медианта есть $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ и действительно лежит в силу сделанного выше замечания уже по другую сторону числа $\alpha$.

Другое, ещё более важное следствие выясненного нами взаимного расположения числа $\alpha$ и его подходящих и промежуточных дробей получается из следующих соображений. Промежуточная дробь $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$, будучи заключена между $\frac{p_k}{q_k}$ и $\alpha$, лежит к $\frac{p_k}{q_k}$ ближе, чем $\alpha$, т. е.

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

(знак равенства здесь невозможен потому, что это означало бы

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, \quad a_{k+2} = 1,$$

т. е. $\alpha$ было бы конечной цепной дробью с последним элементом 1 — случай, который мы с самого начала исключили из рассмотрения).

Таким образом мы приходим к следующему важному предложению.

Теорема 13. *Для всех* $k \geqslant 0$

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}. \qquad (21)$$

Неравенство (21), которое даёт *нижнюю* границу для разности $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$, очевидно, дополняет собою установленное нами выше неравенство теоремы 9, дающее верхнюю границу этой же разности.

ГЛАВА II

# ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЕЛ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

## § 5. Цепные дроби как аппарат для представления вещественных чисел

Теорема 14. *Каждому вещественному числу $\alpha$ соответствует единственная цепная дробь, имеющая это число своим значением. Эта дробь конечна, если число $\alpha$ рационально, и бесконечна, если оно иррационально*[1].

*Доказательство.* Обозначим через $a_0$ наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha$; если $\alpha$ — не целое число, то соотношение

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

позволяет определить число $r_1$; при этом, очевидно, $r_1 > 1$, так как

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1;$$

вообще, если $r_n$ — не целое число, то мы обозначим через $a_n$ наибольшее целое число, не превосходящее $r_n$, и определим число $r_{n+1}$ из соотношения:

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}. \tag{23}$$

Этот процесс, очевидно, может быть продолжен до тех пор, покуда какое-либо $r_n$ не окажется целым числом; при этом очевидно, что $r_n > 1$ $(n \geqslant 1)$.

---

[1]) Мы напоминаем, что рассматриваем цепные дроби с целыми элементами, причём $a_i > 0$ для $i \geqslant 1$, и последний элемент всякой конечной цепной дроби должен быть отличен от единицы.

Соотношение (22) показывает, что

$$\alpha=[a_0;\ r_1];$$

пусть вообще

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ r_n]; \qquad (24)$$

тогда соотношение (23) и формула (5) гл. I показывают, что

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ r_{n+1}];$$

таким образом формула (24) справедлива для всех $n$ (предполагая, разумеется, что $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ — не целые числа).

Если число $\alpha$ рационально, то, очевидно, и все $r_n$ рациональны; легко видеть, что в этом случае наш процесс окончится после конечного числа шагов; в самом деле, если, например, $r_n=\frac{a}{b}$, то

$$r_n-a_n=\frac{a-ba_n}{b}=\frac{c}{b},$$

где $c<b$, так как $r_n-a_n<1$; соотношение (23) даёт:

$$r_{n+1}=\frac{b}{c}$$

(если только $c$ не равно нулю, т. е. если $r_n$ — не целое число, в каковом случае наше утверждение было бы доказано); таким образом $r_{n+1}$ имеет меньшего знаменателя, нежели $r_n$, откуда и следует, что после конечного числа шагов мы в ряду $r_1, r_2, \ldots$ должны притти к целому числу $r_n=a_n$; но в таком случае формула (24) показывает, что число $\alpha$ изображается конечной цепной дробью, последний элемент которой $a_n=r_n>1$.

Если число $\alpha$ иррационально, то и все $r_n$ иррациональны и наш процесс является бесконечным. Полагая

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]=\frac{p_n}{q_n}$$

(где дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима и $q_n>0$), мы в силу формулы (24) и формулы (16) гл. I будем иметь:

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}} \qquad (n\geqslant 2);$$

с другой стороны, очевидно,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}},$$

отсюда

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}$$

и, следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2};$$

таким образом

$$\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow \alpha \text{ при } n \longrightarrow \infty;$$

но это, очевидно, и означает, что бесконечная цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ имеет своим значением данное число $\alpha$.

Таким образом мы показали, что число $\alpha$ всегда может быть представлено цепной дробью; эта дробь конечна, если число $\alpha$ рационально, и бесконечна, если оно иррационально. Нам остаётся показать единственность полученного разложения. Заметим прежде всего, что эта единственность в сущности вытекает уже из рассмотрений § 4 гл. I, где мы видели, что, зная значение данной цепной дроби, мы можем последовательно построить все её подходящие дроби, а следовательно, и все её элементы. Однако требуемая единственность может быть установлена и значительно проще. В самом деле, пусть

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0'; a_1', a_2', \ldots],$$

причём эти цепные дроби могут быть как конечными, так и бесконечными. Условимся обозначать вообще через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Прежде всего очевидно $a_0 = [\alpha]$ и $a_0' = [\alpha]$, откуда $a_0 = a_0'$; далее, если уже установлено, что

$$a_i = a_i' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

то, в легко понятных обозначениях,

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p_i' \\ q_i &= q_i' \end{aligned}\right\} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

и в силу формулы (16) гл. I:

$$\alpha=\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}}=\frac{p'_n r'_{n+1}+p'_{n-1}}{q'_n r'_{n+1}+q'_{n-1}}=\frac{p_n r'_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r'_{n+1}+q_{n-1}},$$

откуда $r_{n+1}=r'_{n+1}$, а так как $a_{n+1}=[r_{n+1}]$ и $a'_{n+1}=[r'_{n+1}]$, то $a_{n+1}=a'_{n+1}$, т. е. данные дроби полностью совпадают, ч. и т. д.

Заметим, что последнее рассуждение было бы невозможным, если бы мы допускали конечные цепные дроби с последним элементом 1; в самом деле, если, например, $a_{n+1}=1$ есть такой последний элемент, то $r_n=a_n+1$ и $a_n\neq[r_n]$.

Мы убедились таким образом, что вещественные числа однозначно изображаются цепными дробями. Основное значение такого изображения заключается, разумеется, в том, что, зная изображающую вещественное число $\alpha$ цепную дробь, мы можем вычислить это число с любой наперед заданной степенью точности. В силу этого аппарат цепных дробей может претендовать в изображении вещественных чисел, по крайней мере принципиально, на такую же роль, как, например, и аппарат десятичных или вообще систематических (т. е. расположенных по той или иной системе счисления) дробей.

Каковы же основные преимущества или недостатки цепных дробей как аппарата для изображения вещественных чисел по сравнению с гораздо более распространёнными систематическими дробями? Чтобы ответить на этот вопрос, надо прежде всего дать себе ясный отчёт в том, какие требования могут и должны быть предъявляемы к такого рода аппарату. Очевидно, первое и основное *теоретическое* требование должно состоять в том, чтобы аппарат возможно полнее отображал в себе свойства того числа, которое он изображает, так, чтобы, свойства эти могли быть возможно полно и возможно просто выявлены всякий раз, как дано изображение числа этим аппаратом.

В отношении этого первого требования цепные дроби имеют несомненное и значительное преимущество перед дробями систематическими (и в частности десятичными). В этом мы постепенно убедимся на протяжении всей настоящей главы; до некоторой степени, впрочем, это ясно

и из априорных соображений: в то время как всякая систематическая дробь связана с определённой системой счисления и потому неизбежно отражает в себе не столько абсолютные свойства изображаемого ею числа, сколько его взаимоотношения именно с этой выбранной системой счисления,—цепные дроби ни с какой системой счисления не связаны и в чистом виде воспроизводят свойства изображаемых ими чисел. Так, мы уже видели, что рациональность или иррациональность изображаемого числа находит себе полное выражение в конечности или бесконечности соответствующей ему цепной дроби. Известно, что для систематических дробей соответствующий признак значительно сложнее: конечность или бесконечность изображающей дроби зависит здесь, кроме природы изображаемого числа, существенным образом и от того, в каком отношении оно стоит к выбранной системе счисления.

Однако, кроме указанного нами основного теоретического требования, ко всякому аппарату, служащему для изображения чисел, естественно должны быть предъявляемы и требования *практического* характера (некоторые из которых могут, впрочем, иметь и известное теоретическое значение). Так, очень существенным является требование, чтобы аппарат позволял с возможною простотою находить приближённые значения изображаемого числа с наперёд заданною степенью точности. Этому требованию аппарат цепных дробей удовлетворяет в высокой степени, и во всяком случае лучше, чем аппарат дробей систематических; более того, мы скоро убедимся, что приближённые значения, даваемые этим аппаратом, в известном, чрезвычайно простом и важном смысле, обладают свойством *наилучших приближений*.

Есть, однако, другое, ещё более существенное практическое требование, которому этот аппарат совершенно не удовлетворяет. Потребности счёта заставляют нас желать от всякого изображающего аппарата, чтобы, зная изображения нескольких чисел, мы могли с достаточной лёгкостью находить изображения и простейших функций этих чисел (прежде всего их суммы и произведения). Короче говоря, удобный в практическом отношении аппарат должен допускать достаточно простые *правила ариф-*

*метических действий*, без чего он не может служить орудием счёта. Известно, каким удобством в этом отношении обладают систематические дроби. Напротив, для цепных дробей никаких практически приемлемых правил арифметических действий не существует; уже задача отыскания цепной дроби для суммы по цепным дробям, изображающим слагаемые, чрезвычайно сложна и в счётной практике невыполнима.

Указанные нами преимущества и недостатки цепных дробей сравнительно с дробями систематическими в значительной мере предопределяют собою и разграничение областей применения этих двух изображающих аппаратов. В то время как в практике счёта пользуются почти исключительно систематическими дробями, в теоретических исследованиях при изучении арифметических законов континуума и арифметических свойств отдельных иррациональностей находит себе преимущественное применение аппарат цепных дробей, являющийся наилучшим и незаменимым орудием этого рода исследований. Проследить этот аппарат в этой его роли — основная задача всего последующего.

## § 6. Подходящие дроби в качестве наилучших приближений

Желая представить иррациональное число $\alpha$ с той или иной степенью точности в виде обыкновенной рациональной дроби, мы можем, естественно, пользоваться для этой цели подходящими дробями изображающей $\alpha$ цепной дроби. Степень достигаемой при этом точности устанавливается теоремами 9 и 13 гл. I; именно, мы имеем:

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Задача аппроксимации (приближённого выражения) иррациональных чисел с помощью рациональных дробей в простейшем своём виде ставится обычно так, что ищется рациональная дробь с наименьшим (положительным) знаменателем, отличающаяся от данного иррационального числа не более чем на некоторую наперёд

заданную величину. Поставленная таким образом задача может, впрочем, иметь смысл и в том случае, когда данное число $\alpha$ является рациональным; так, если $\alpha$ представляет собою дробь, числитель и знаменатель которой весьма велики, может встать вопрос о приближённом представлении этого числа при помощи дроби, числитель и знаменатель которой были бы меньшими числами. С чисто практической точки зрения между этими двумя случаями (рационального и иррационального $\alpha$) нет в сущности даже различия, ибо на практике всякое число задаётся лишь с известной степенью точности.

Непосредственно ясно, что для решения этой задачи аппарат систематических дробей совершенно непригоден, ибо даваемые им аппроксимирующие дроби имеют знаменатели, определяемые исключительно выбранной системой счисления (в случае десятичных дробей — это степени числа 10) и совершенно не зависящие от арифметической природы изображаемого числа. Напротив, в случае цепных дробей знаменатели подходящих дробей полностью определяются изображаемым этой дробью числом, и потому мы имеем все основания ожидать, что эти подходящие дроби, будучи тесным и естественным образом связаны с изображаемым числом и полностью им определяясь, должны играть существенную роль в решении задачи о наилучшей аппроксимации этого числа рациональными дробями.

Условимся называть рациональную дробь $\frac{a}{b}$ $(b>0)$ *наилучшим приближением* вещественного числа $\alpha$, если всякая другая рациональная дробь с тем же или меньшим знаменателем лежит на большем расстоянии от $\alpha$, иначе, если из $0<d\leqslant b$, $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ необходимо следует:

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|>\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|.$$

Теорема 15. *Всякое наилучшее приближение числа $\alpha$ есть одна из подходящих или промежуточных дробей изображающей это число цепной дроби.*

Предварительное замечание. Для того чтобы это предложение не допускало исключений, необходимо, как мы условились в § 2, ввести в рассмотрение подходящие дроби порядка — 1, полагая $p_{-1}=1$, $q_{-1}=0$. В самом деле, дробь $\frac{1}{3}$ является, например, как легко убедиться, наилучшим приближением числа $\frac{1}{4}$, но не входит в число его подходящих и промежуточных дробей, так как совокупность этих дробей, если начинать с подходящей дроби порядка нуль, исчерпывается двумя членами, $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{4}$; напротив, если принять дробь $\frac{1}{0}$ в качестве подходящей дроби порядка — 1, то эта совокупность получает вид:

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

и содержит дробь $\frac{1}{3}$.

*Доказательство.* Пусть $\frac{a}{b}$ есть наилучшее приближение числа $\alpha$: тогда прежде всего $\frac{a}{b} \geqslant a_0$; в самом деле, в случае $\frac{a}{b} < a_0$ дробь $\frac{a_0}{1}$, отличная от $\frac{a}{b}$ и имеющая знаменателя не большего, чем $b$, лежала бы к $\alpha$ ближе, чем $\frac{a}{b}$, вследствие чего $\frac{a}{b}$ не было бы наилучшим приближением.

Совершенно аналогичным рассуждением мы можем показать, что

$$\frac{a}{b} \leqslant a_0+1.$$

Таким образом мы вправе допустить, что $a_0 < \frac{a}{b} < a_0+1$ (в случае $\frac{a}{b}=a_0$ или $\frac{a}{b}=a_0+1$ теорема была бы дока-

зана, так как $\frac{a}{1}=\frac{p_0}{q_0}$ есть подходящая, а $\frac{a_0+1}{1}=\frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}}$ — промежуточная дробь числа $\alpha$).

Если дробь $\frac{a}{b}$ не совпадает ни с одною подходящей или промежуточной дробью числа $\alpha$, то она должна заключаться между двумя последовательными такими дробями, т. е. при надлежаще выбранных $k$ и $r$ ($k>0$, $0\leqslant r<a_{k+1}$ или $k=0$, $1\leqslant r<a_1$) между дробями

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}},$$

вследствие чего

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|<\left|\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|=$$
$$=\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\{q_k r+q_{k-1}\}}.$$

Но, с другой стороны, очевидно,

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|=\frac{m}{b(q_k r+q_{k-1})},$$

где $m$ — некоторое целое положительное число, и, значит, по меньшей мере равно единице; следовательно,

$$\frac{1}{b(q_k r+q_{k-1})}<\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\ \{q_k r+q_{k-1}\}},$$

откуда

$$q_k(r+1)+q_{k-1}<b.$$

Дробь

$$\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}, \tag{25}$$

имея, таким образом, знаменателя меньшего, чем дробь $\frac{a}{b}$, лежит к числу $\alpha$ ближе, чем дробь

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}} \tag{26}$$

(ибо вообще в силу результатов § 4 всякая последующая промежуточная дробь лежит к $\alpha$ ближе, чем предыдущая), а значит, и ближе, чем дробь $\frac{a}{b}$, заключённая

между (25) и (26); но это противоречит определению наилучшего приближения, и таким образом теорема 15 доказана.

При определении лежащего в основании этой теоремы понятия наилучшего приближения мы оценивали близость рациональной дроби $\frac{a}{b}$ к числу $\alpha$ малостью (по абсолютному значению) разности $\alpha - \frac{a}{b}$, что, конечно, представляется наиболее естественным; однако, в теории чисел часто бывает важнее или удобнее рассматривать с этой целью разность $b\alpha - a$, которая только множителем $b$ отличается от предыдущей и малость которой (по абсолютному значению) также может поэтому служить критерием близости дроби $\frac{a}{b}$ к числу $\alpha$. Этот переход от одной характеристики к другой на первый взгляд может показаться тривиальным и действительно во многих случаях является таковым; однако это всё же не всегда так, и мы в этом сейчас убедимся; дело в том, что множитель $b$, отличающий эти две разности друг от друга, не есть постоянная величина, но связан с самой аппроксимирующей дробью и меняется при её замене.

Условимся называть теперь те наилучшие приближения, о которых шла речь в теореме 15, наилучшими приближениями *первого рода*; условимся, далее, называть рациональную дробь $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ ***наилучшим приближением второго рода*** числа $\alpha$, если из $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqslant b$ необходимо следует:

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Наилучшие приближения второго рода определяются, таким образом, с помощью характеристики $|b\alpha - a|$ совершенно аналогично тому, как наилучшие приближения первого рода — с помощью характеристики $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$.

Нетрудно показать, что всякое наилучшее приближение второго рода вместе с тем обязательно есть и наилучшее приближение первого рода.

В самом деле, если бы мы имели

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|,\ \left(\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b},\ d\leqslant b\right),$$

то, перемножая почленно первое и последнее из этих неравенств, мы получили бы:

$$|d\alpha-c|\leqslant|b\alpha-a|;$$

другими словами, если бы дробь $\frac{a}{b}$ не была наилучшим приближением первого рода, то она не могла бы быть и наилучшим приближением второго рода, ч. и т. д.

Обратное утверждение было бы, однако, неверным: наилучшее приближение первого рода может не быть наилучшим приближением второго рода. В самом деле, очень легко, например, убедиться, что дробь $\frac{1}{3}$ есть наилучшее приближение первого рода для числа $\frac{1}{5}$; однако наилучшим приближением второго рода оно не является, что видно из неравенств:

$$\left|1\cdot\frac{1}{5}-0\right|<\left|3\cdot\frac{1}{5}-1\right|,\ 1<3.$$

Из сделанных замечаний и теоремы 15 вытекает, что все наилучшие приближения второго рода являются подходящими или промежуточными дробями. Однако — и в этом лежит основной залог той роли, которую для наилучших приближений второго рода играет аппарат цепных дробей — мы можем установить гораздо более точное предложение.

Теорема 16. *Всякое наилучшее приближение второго рода есть подходящая дробь.*

*Доказательство.* Пусть дробь $\frac{a}{b}$ есть наилучшее приближение второго рода числа

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots],$$

подходящие дроби которого будем обозначать через $\frac{p_k}{q_k}$. Если бы было $\frac{a}{b} < a_0$, то мы имели бы:

$$|1\cdot\alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|b\alpha - a\right|, \ 1 \leqslant b,$$

т. е. $\frac{a}{b}$ не было бы наилучшим приближением второго рода; таким образом $\frac{a}{b} \geqslant a_0$. Но в таком случае дробь $\frac{a}{b}$, если она не совпадает ни с одною из подходящих дробей, должна либо быть заключённой между двумя подходящими дробями $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ одинаковой чётности, либо быть больше, чем $\frac{p_1}{q_1}$. В первом случае

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geqslant \left|\frac{1}{bq_{k-1}}\right|$$

и

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

откуда

$$b > q_k; \tag{27}$$

с другой стороны,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geqslant \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{1}{bq_{k+1}},$$

и, значит,

$$|b\alpha - a| \geqslant \frac{1}{q_{k+1}},$$

в то время как

$$|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}},$$

откуда

$$|q_k\alpha - p_k| \leqslant |b\alpha - a|; \tag{28}$$

соотношения (27) и (28) показывают, что $\frac{a}{b}$ не есть наилучшее приближение второго рода.

Во втором случае $\left(\text{т. е. если } \frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}\right)$ мы имеем:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{1}{bq_1},$$

откуда

$$\left|b\alpha - a\right| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1};$$

с другой стороны, очевидно,

$$|1 \cdot \alpha - a_0| \leqslant \frac{1}{a_1},$$

так что

$$|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|, \quad 1 \leqslant b,$$

что снова противоречит понятию наилучшего приближения второго рода. Таким образом теорема 16 доказана полностью.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности обращения теорем 15 и 16. Прежде всего, теорема 15, как легко видеть, необратима; промежуточные дроби могут не быть наилучшими приближениями первого рода; так, для числа $\alpha = \frac{4}{5}$ дробь $\frac{1}{2}$ является, как легко видеть, промежуточной дробью; но она не есть наилучшее приближение, ибо

$$\left|\frac{4}{5} - \frac{1}{1}\right| < \left|\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right|, \quad 1 < 2.$$

Подобного рода примеров можно построить сколько угодно, в чём читатель без труда может убедиться самостоятельно.

Напротив, теорема 16 допускает почти полное обращение, что, конечно, чрезвычайно увеличивает её значение.

Теорема 17. *Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода; единственное* (тривиальное) *исключение представляет:*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Предварительное замечание. В случае $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ дробь $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ действительно не является наи-

лучшим приближением второго рода, ибо

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1 \, |1 \cdot \alpha - a_0| .$$

*Доказательство.* Рассмотрим форму

$$|y\alpha - x|, \tag{29}$$

где $y$ пробегает значения $1, 2, \ldots, q_k$, а $x$ может принимать любые целые значения. Обозначим через $y_0$ то значение $y$, при котором форма (29) после соответственного подбора $x$ принимает наименьшее возможное значение (если таких значений $y$ несколько, то за $y_0$ мы принимаем *наименьшее из них*). То значение $x$, при котором $|y_0\alpha - x|$ достигает своего минимума, обозначим через $x_0$. Легко убедиться, что это значение — *единственное*. В самом деле, если бы мы имели

$$\left|\alpha - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\alpha - \frac{x_0'}{y_0}\right| \qquad (x_0 \neq x_0'),$$

то, очевидно, было бы

$$\alpha = \frac{x_0 + x_0'}{2y_0} .$$

Мы утверждаем, что эта дробь несократима. В самом деле, если $x_0 + x_0' = lp$, $2y_0 = lq$ $(l > 1)$, то в случае $l > 2$ мы имеем:

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \ |q\alpha - p| = 0,$$

что противоречит определению $y_0$; если же $l = 2$, то $q = y_0$,

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|,$$

что противоречит определению $x_0$.

Разлагая рациональное число $\alpha$ в цепную дробь, мы будем поэтому иметь:

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n = x_0 + x_0', \quad q_n = 2y_0 = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geqslant 2;$$

поэтому, если $a_n > 2$ или если $a_n = 2$, $n > 1$, мы будем иметь $q_{n-1} < y_0$; но

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant |y_0\alpha - x_0|,$$

что противоречит определению $y_0$; если же $n=1$, $a_n=2$, то $\alpha=a_0+\frac{1}{2}$, $y_0=1$, и мы имеем как раз исключённый нами случай.

Итак, значения $y_0$ и $x_0$ определяются заданными условиями единственным образом. Отсюда непосредственно вытекает, что $\frac{x_0}{y_0}$ есть наилучшее приближение второго рода числа $\alpha$, ибо неравенства

$$|b\alpha-a|\leqslant|y_0\alpha-x_0| \qquad \left(\frac{a}{b}\neq\frac{x_0}{y_0},\ b\leqslant y_0\right),$$

очевидно, противоречили бы определению чисел $x_0$, $y_0$. В силу теоремы 16 мы имеем поэтому:

$$x_0=p_s,\ y_0=q_s \qquad (s\leqslant k).$$

Если $s=k$, то теорема доказана; но если бы было $s<k$, то мы имели бы:

$$|q_s\alpha-p_s|>\frac{1}{q_s+q_{s+1}}\geqslant\frac{1}{q_{k-1}+q_k},$$

$$|q_k\alpha-p_k|\leqslant\frac{1}{q_{k+1}},$$

а так как в силу определения чисел $p_s=x_0$ и $q_s=y_0$

$$|q_s\alpha-p_s|\leqslant|q_k\alpha-p_k|,$$

то

$$\frac{1}{q_{k-1}+q_k}<\frac{1}{q_{k+1}},$$

т. е.

$$q_{k+1}<q_k+q_{k-1},$$

что невозможно в силу закона образования чисел $q_k$. Таким образом теорема 17 доказана.

Те свойства аппарата цепных дробей, которые установлены нами в настоящем параграфе, исторически послужили первым поводом к открытию и изучению этого аппарата. Гейгенс, задавшись целью построить с помощью зубчатых колёс модель солнечной системы, был поставлен перед задачей определения чисел зубцов этих колёс таким образом, чтобы отношение этих чисел для двух связанных между собою колёс (равное отноше-

нию времен полного оборота их) было по возможности близко к отношению $\alpha$ времён обращения соответствующих планет. Вместе с тем эти числа зубцов по техническим причинам не могли, разумеется, быть чрезмерно большими. Таким образом встал вопрос об отыскании такой рациональной дроби, числитель и знаменатель которой не превосходили бы данного предела и которая вместе с тем возможно ближе лежала бы к данному числу $\alpha$ (это число теоретически может быть и иррациональным, практически же в данном случае задаётся рациональной дробью, числитель и знаменатель которой очень велики); мы уже видели, что теория цепных дробей даёт возможность полностью решить поставленную таким образом задачу.

## § 7. Порядок приближения

В предыдущем параграфе мы занимались оценкой малости разности $\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|$ в сравнении с другими разностями того же типа. Здесь мы займёмся оценкой малости той же разности самой по себе, безотносительно к другим разностям этого вида. Очевидно, естественный путь для оценки того, насколько мала величина $\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|$, состоит в том, чтобы сравнивать её с какой-либо убывающей функцией от $q_k$. В этом направлении теорема 9 гл. I непосредственно приводит нас к неравенству[1]):

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^2}. \tag{30}$$

Поэтому прежде всего возникает вопрос о том, нельзя ли усилить это неравенство, т. е. заменить его правую часть другой функцией $f(q_k)$ знаменателя $q_k$, которая при всех $n \geqslant 1$ удовлетворяла бы неравенству:

$$f(n)<\frac{1}{n^2}.$$

---

[1]) В случае $\alpha=\frac{p_k}{q_k}$ (когда теорема 9 неприменима ввиду отсутствия $q_{k+1}$) неравенство (30) становится тривиальным.

Легко видеть, что если мы хотим, чтобы усиленное таким образом неравенство (30) выполнялось для любого $\alpha$ при всех значениях $k$, то никакого существенного усиления в этом направлении достигнуть невозможно; точнее говоря, сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такой случай, когда

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2};$$

чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть число

$$\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)},$$

для которого

$$p_1 = 1, \quad q_1 = n, \quad p_3 = n+1, \quad q_3 = n(n+2),$$

и потому

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{\left(q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)};$$

стоит только выбрать $n$ согласно неравенству

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1 - \varepsilon,$$

чтобы иметь

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

Но если отказаться от требования, чтобы усиленное неравенство выполнялось при любом $\alpha$ *для всех без исключения* значений $k$, то можно притти, как мы сейчас покажем, к ряду интересных и важных предложений.

Теорема 18. *Если число $\alpha$ имеет подходящую дробь порядка $k > 0$, то обязательно имеет место по меньшей мере одно из двух неравенств*:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2},$$

$$\left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

*Доказательство.* Так как $\alpha$ заключено между $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$, то

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|+\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\frac{1}{q_kq_{k+1}}<\frac{1}{2q_k^2}+\frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

(последнее неравенство выражает собою тот факт, что среднее геометрическое величин $\frac{1}{q_k^2}$ и $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ меньше их среднего арифметического; знак равенства был бы возможен лишь при $q_k=q_{k-1}$, что в данном случае исключено). Отсюда, очевидно, непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Доказанное нами предложение особенно интересно потому, что оно допускает в известном смысле обращение.

Теорема 19. *Всякая несократимая рациональная дробь $\frac{a}{b}$, удовлетворяющая неравенству:*

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2b^2},$$

*есть подходящая дробь числа $\alpha$.*

*Доказательство.* В силу теоремы 16 достаточно доказать, что дробь $\frac{a}{b}$ является для числа $\alpha$ наилучшим приближением второго рода. Пусть

$$|d\alpha-c|\leqslant|b\alpha-a|<\frac{1}{2b}\qquad\left(d>0,\ \frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}\right);$$

тогда

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|<\frac{1}{2bd}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|+\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2bd}+\frac{1}{2b^2}=\frac{b+d}{2b^2d}; \quad (31)$$

с другой стороны, так как $\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}$, то

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|\geqslant\frac{1}{bd};$$

поэтому неравенство (31) даёт:

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d},$$

откуда $d > b$; таким образом дробь $\frac{a}{b}$ действительно есть наилучшее приближение второго рода числа $\alpha$, и теорема 19 доказана.

Дальнейшим усилением теоремы 18 является следующая значительно более глубокая

Теорема 20. *Если число $\alpha$ имеет подходящую дробь порядка $k > 1$, то обязательно имеет место по меньшей мере одно из следующих трех неравенств:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2},$$

$$\left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2},$$

$$\left|\alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}.$$

*Доказательство*. Положим для $k \geqslant 1$

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \varphi_k, \quad \varphi_k + r_k = \psi_k.$$

Лемма. *Если $k \geqslant 2$, $\psi_k \leqslant \sqrt{5}$, $\psi_{k-1} \leqslant \sqrt{5}$, то*

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

В самом деле, так как

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \varphi_n \tag{32}$$

и

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}},$$

то

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \varphi_n + r_n = \psi_n,$$

а потому в силу условий леммы

$$\varphi_k + r_k \leqslant \sqrt{5}, \quad \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} \leqslant \sqrt{5},$$

откуда

$$(\sqrt{5} - \varphi_k)\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k}\right) \geqslant 1,$$

или, так как $\varphi_k$ — рациональное число,

$$5 - \sqrt{5}\left(\varphi_k + \frac{1}{\varphi_k}\right) > 0,$$

откуда, так как $\varphi_k > 0$, получаем

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k\right)^2 < \frac{1}{4},$$

и, следовательно,

$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \varphi_k < \frac{1}{2},$$

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

что и доказывает лемму.

Допустим теперь, что в противоположность нашему утверждению

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \quad (n = k,\ k-1,\ k-2);$$

в силу формулы (16) гл. I мы имеем:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| =$$
$$= \frac{1}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \psi_{n+1}},$$

и, следовательно,

$$\psi_{n+1} \leqslant \sqrt{5} \quad (n = k,\ k-1,\ k-2).$$

На основании нашей леммы мы заключаем отсюда, что

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \varphi_{k+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

а значит, в силу равенства (32),

$$a_k = \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

что невозможно; полученное противоречие, очевидно, и доказывает теорему 20.

Теоремы 18 и 20 производят очевидное впечатление начала цепи предложений, допускающей и дальнейшее продолжение. Однако это впечатление ошибочно. В самом деле, рассмотрим число

$$\alpha = [1;\ 1,\ 1, \ldots];$$

полагая, как обычно, $\alpha = 1 + \frac{1}{r_1}$, мы, очевидно, имеем $r_1 = \alpha$, откуда

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Так как, очевидно, $r_n = \alpha$ при любом $n$, то

$$\alpha = \frac{p_k\alpha + p_{k-1}}{q_k\alpha + q_{k-1}},$$

и, следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k\alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2\left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

Но в силу теоремы 6 гл. I мы имеем:

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1;\ 1,\ 1, \ldots,\ 1] \to \alpha \quad (k \to \infty),$$

откуда

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k \ (\varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty).$$

Таким образом

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \varepsilon_k\right)} = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5} + \varepsilon_k)}.$$

Это показывает, что, каково бы ни было число $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, для достаточно больших $k$ мы необходимо будем иметь:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}.$$

Таким образом постоянная $\frac{1}{\sqrt{5}}$ в теореме 20 не может быть заменена никакою меньшей постоянной, если мы хотим, чтобы соответствующее неравенство выполнялось для бесчисленного множества значений $k$ при любом $\alpha$. Для всякой меньшей постоянной найдётся такое $\alpha$ $\left(\text{именно } \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, которое может удовлетворять требуемому неравенству не более чем для конечного числа значений $k$. В частности, цепь предложений, начинающаяся с теорем 18 и 20, на этой последней теореме и обрывается, не допуская дальнейшего продолжения.

## § 8. Общие законы аппроксимации

До сих пор мы специально интересовались приближениями, даваемыми подходящими дробями, и выяснили ряд основных вопросов, связанных с этой задачей. Но так как мы при этом убедились, что подходящие дроби в известном смысле являются наилучшими приближениями, то мы можем рассчитывать, что полученные результаты позволят нам в полной мере изучить законы, которыми управляется приближение иррациональностей рациональными дробями, независимо от какого-либо специального изображающего аппарата. К этому кругу проблем мы теперь и обращаемся. В рамках настоящей элементарной монографии мы не можем, конечно, дать сколько-нибудь полного изложения основ соответствующей теории, и не только за недостатком места, но главным образом и потому, что это имеет лишь косвенное отношение к нашей задаче. Мы, естественно, ограничимся тем, что приведём ряд элементарных предложений, которые должны будут иллюстрировать собою

применение цепных дробей к изучению арифметической природы иррациональностей.

Первая естественно возникающая здесь в связи с результатами предыдущего параграфа задача формулируется следующим образом: для каких постоянных $c$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

имеет при любом вещественном $\alpha$ бесчисленное множество решений в целых $p$ и $q$ $(q > 0)$? Заключительный результат предыдущего параграфа легко приводит нас к следующему предложению.

Теорема 21. *Неравенство* (33) *имеет при любом вещественном* $\alpha$ *бесконечное множество решений в целых* $p$ *и* $q$ $(q > 0)$, *если* $c \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$; *если же* $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, *то при надлежаще выбранном* $\alpha$ *неравенство* (33) *будет иметь не более конечного числа таких решений.*

В самом деле, первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 20 (в случае, когда $\alpha = \frac{a}{b}$ рационально и потому имеет лишь конечное число подходящих дробей, первое утверждение теоремы 21 может быть тривиальным образом доказано, если мы положим $q = nb$, $p = na$, $n = 1, 2, \ldots$). Пусть поэтому $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$; положим, как в § 7,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;\ 1,\ 1,\ \ldots].$$

Если целые числа $p$ и $q$ $(q > 0)$ удовлетворяют неравенству (33), то в силу теоремы 19 $\frac{p}{q}$ есть подходящая дробь числа $\alpha$; но в конце § 7 мы видели, что среди этих подходящих дробей имеется не более конечного числа таких, которые удовлетворяют неравенству (33), если, как мы предположили, $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$. Этим, очевидно, наше утверждение доказано полностью.

Таким образом, вообще говоря, т. е. если учитывать все возможные вещественные числа $\alpha$, порядок приближения, характеризуемый величиною $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, не может быть превзойдён. Но это не значит, конечно, что не существует таких отдельных иррациональностей $\alpha$, для которых возможны аппроксимации значительно более высокого порядка. Напротив, имеющиеся в этом направлении возможности совершенно неограниченны, и проще всего убедиться в этом именно с помощью аппарата цепных дробей.

Теорема 22. *Какова бы ни была положительная функция $\varphi(q)$ натурального аргумента $q$, найдётся иррациональное число $\alpha$, для которого неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varphi(q)$$

*имеет бесчисленное множество решений в целых $p$ и $q$* $(q>0)$.

*Доказательство.* Построим бесконечную цепную дробь $\alpha$, выбирая последовательно её элементы так, чтобы они удовлетворяли неравенствам:

$$a_{k+1}>\frac{1}{q_k^2\varphi(q_k)} \qquad (k\geqslant 0),$$

что, конечно, можно сделать бесчисленным множеством способов ($a_0$ при этом может быть выбрано произвольно). Тогда для любого $k\geqslant 0$

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}=\frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})}\leqslant\frac{1}{a_{k+1}q_k^2}<\varphi(q_k),$$

что и доказывает теорему.

Заметим теперь, что в самом общем случае неравенства

$$\frac{1}{q_k(q_k+q_{k+1})}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{q_kq_{k+1}},$$

или, что то же,

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1}+1+\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1}+\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

дают:

$$\frac{1}{q_k^2(a_{k+1}+2)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}}, \qquad (34)$$

откуда видно, что при данных $a_0, a_1, \ldots, a_k$ дробь $\frac{p_k}{q_k}$ тем ближе аппроксимирует число $\alpha$, чем больше следующий элемент $a_{k+1}$; а так как подходящие дроби во всех случаях являются наилучшими приближениями, то мы приходим к выводу, что хорошие приближения рациональными дробями должны допускать те иррациональности, среди элементов которых встречаются большие числа; это качественного характера замечание находит себе количественное выражение именно в неравенствах (34). В частности, наихудший порядок аппроксимации будут допускать иррациональности с ограниченными элементами. Таким образом становится понятным, почему мы уже неоднократно, желая получить иррациональное число, которое не допускало бы приближений выше определённого заданного порядка, выбирали для этой цели число

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1;\ 1,\ 1,\ \ldots];$$

из всех иррациональностей оно обладает, очевидно, наименьшими возможными элементами (не считая $a_0$, которое не играет здесь никакой роли) и потому хуже всех аппроксимируется рациональными дробями.

Те специфические особенности аппроксимации, которые свойственны числам с ограниченными элементами, находят себе полное выражение в следующем предложении, которое после всего замеченного нами становится почти очевидным.

Теорема 23. *Для всякого иррационального числа $\alpha$ с ограниченными элементами неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \qquad (33)$$

*при достаточно малом $c$ не имеет решений в целых $p$ и $q$ $(q > 0)$. Напротив, для всякого числа $\alpha$ с неогра-*

*ниченным рядом элементов неравенство* (33) *при любо.. $c>0$ имеет бесчисленное множество таких решений.*

Иначе говоря, иррациональности с ограниченными элементами допускают порядок аппроксимации не выше $\frac{1}{q^2}$, и, напротив, всякая иррациональность с неограниченными элементами допускает более высокий порядок аппроксимации.

*Доказательство.* Если среди элементов цепной дроби, изображающей $\alpha$, имеются сколь угодно большие, то при любом $c>0$ найдётся бесчисленное множество значений $k$, для которых

$$a_{k+1} > \frac{1}{c},$$

а следовательно, в силу второго из неравенств (34) мы будем иметь для бесчисленного множества значений $k$:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{c}{q_k^2},$$

чем доказывается второе утверждение теоремы.

Если же существует такое $M>0$, что

$$a_k < M \quad (k=1, 2, \ldots),$$

то в силу первого из неравенств (34) мы будем иметь для любого $k \geqslant 0$:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)}.$$

Отсюда для любой пары целых чисел $p$ и $q$ $(q>0)$, определяя индекс $k$ из неравенств

$$q_{k-1} < q \leqslant q_k$$

и помня, что все подходящие дроби являются наилучшими приближениями первого рода, мы будем иметь:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} =$$

$$= \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q}{q_k}\right)^2 > \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 >$$

$$> \frac{1}{q^2(M+2)} \frac{1}{(a_k+1)^2} > \frac{1}{(M+2)(M+1)^2 q^2};$$

таким образом, если мы выберем

$$c < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2},$$

то неравенство (33) не может быть выполнено ни для одной пары целых чисел $p$ и $q$ $(q > 0)$; этим доказано и первое утверждение теоремы.

До сих пор мы всюду оценивали близость аппроксимации малостью разности $\alpha - \frac{p}{q}$; однако мы могли бы и здесь, подобно тому как мы это делали в § 6, рассматривать вместо этого разность $q\alpha - p$, и во всех доказанных нами предложениях сделать соответствующие изменения формулировок. Это простое замечание непосредственно приводит к некоторой новой и чрезвычайно важной точке зрения на изучаемую нами проблему.

Простейшее однородное линейное уравнение с двумя неизвестными $x, y$:

$$\alpha x - y = 0, \qquad (35)$$

где $\alpha$ — данное иррациональное число, не может, разумеется, быть точно разрешено в целых числах[1]); однако можно поставить задачу о приближённом его решении, т. е. о подборе таких целых чисел $x$, $y$, для которых разность $\alpha x - y$ достигает той или иной степени малости. Очевидно, что все предшествующие теоремы настоящего параграфа могут быть истолкованы как утверждения о закономерностях, управляющих такого рода приближенным решением уравнения (35) в целых числах. Так, например, теорема 21 показывает, что всегда существует бесчисленное множество таких пар целых чисел $x$ и $y$ $(x > 0)$, для которых

$$|\alpha x - y| < \frac{C}{x}, \qquad (36)$$

если $C$ — положительное число, не меньшее, чем $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

С этой новой точки зрения представляется естественным перейти от однородного уравнения (35) к неодно-

[1]) Не считая, конечно, тривиального решения $x = y = 0$.

родному уравнению

$$\alpha x - y = \beta, \tag{37}$$

где $\beta$ — любое данное вещественное число, и исследовать возможность и характер его приближённого решения в целых числах $x, y$, иначе говоря — исследовать закономерности, возникающие при попытке сделать разность $\alpha x - y - \beta$ возможно малой надлежащим подбором целых чисел $x, y$.

Эта задача была впервые поставлена великим русским учёным П. Л. Чебышевым, который и получил первые основные связанные с нею результаты. В настоящее время разработка её интенсивно продолжается, главным образом советской арифметической школой.

Первая основная особенность, отличающая неоднородный случай от однородного, заключается в том, что для возможности сделать величину $|\alpha x - y - \beta|$ при любом $\beta$ сколь угодно малой подходящим выбором целых чисел $x$ и $y$ существенно необходимо, чтобы число $\alpha$ было *иррациональным* (тогда как в однородном случае величина $|\alpha x - y|$ может быть сделана как угодно малой при *любом* $\alpha$).

В самом деле, если $\alpha = \frac{a}{b}$, где $b > 0$ и $a$ — целые числа, то, полагая $\beta = \frac{1}{2b}$, мы при любых целых $x$ и $y$ будем иметь:

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{2(ax - by) - 1}{2b}\right| \geqslant \frac{1}{2b},$$

так как $|2(ax - by) - 1|$, будучи нечётным целым числом, по меньшей мере равно единице.

Таким образом во всём дальнейшем мы будем считать число $\alpha$ иррациональным. При этом условии, как мы теперь убедимся, не только всегда можно сделать величину $|\alpha x - y - \beta|$ как угодно малой, но аналогия с однородным случаем простирается еще значительно дальше.

Теорема 24 (Чебышев). *Для любого иррационального числа $\alpha$ и для любого вещественного числа $\beta$ нера-*

*венство*

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{x}$$

*имеет бесчисленное множество решений в целых $x$ и $y$* ($x > 0$).

Предварительное замечание. Очевидно, что этот результат вполне аналогичен соответствующему свойству однородных уравнений, находящему себе выражение в теореме 21; различие заключается лишь в том, что на месте постоянной $\frac{1}{\sqrt{5}}$ здесь появляется 3; порядок же аппроксимации остаётся прежним. Заметим ещё, что число 3 не является здесь наименьшим возможным и что точное значение нижней грани тех чисел, которыми оно может быть заменено без нарушения справедливости теоремы 24, значительно меньше.

*Доказательство.* Пусть $\frac{p}{q}$ — любая подходящая дробь числа $\alpha$; тогда мы имеем:

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad (0 < |\delta| < 1); \tag{38}$$

далее, каково бы ни было вещественное число $\beta$, мы можем найти такое целое число $t$, что

$$|q\beta - t| \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \qquad (|\delta'| \leqslant 1). \tag{39}$$

Так как числа $p$ и $q$ не имеют общих делителей кроме $\pm 1$, то существует пара целых чисел $x$, $y$, удовлетворяющих соотношениям[1]):

$$\frac{q}{2} \leqslant x < \frac{3q}{2}, \qquad px - qy = t.$$

---

[1]) Вот доказательство: если $\frac{r}{s}$ есть подходящая дробь числа $\alpha$, непосредственно предшествующая $\frac{p}{q}$, то

Но в таком случае мы будем иметь в силу соотношений (38) и (39):

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q}\right| =$$
$$= \left|\frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q}\right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

а так как

$$q > \frac{2}{3}x,$$

то

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x};$$

наконец, число $q$ может быть выбрано как угодно большим, а так как $x \geqslant \frac{q}{2}$, то и $x$ как угодно велико; этим, очевидно, теорема доказана.

Но задача о приближённом решении в целых числах уравнения (37) может быть поставлена ещё в другом виде, пожалуй даже несколько более естественном. Так как сущность проблемы заключается в том, чтобы сделать величину $|\alpha x - y - \beta|$ возможно малою посредством выбора возможно небольших целых чисел $x$, $y$, то наиболее естественно поставить задачу следующим образом. Мы знаем (в силу только что доказанной теоремы 24), что если задано как угодно большое положительное число $n$, то при любом иррациональном $\alpha$ и любом вещественном $\beta$ можно найти целые числа $x > 0$, $y$, удовлетворяющие неравенству:

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}; \tag{40}$$

однако теорема 24 не даёт нам, вообще говоря, никаких указаний на то, в каких пределах придётся искать

---

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \quad q(\varepsilon rt) - p(\varepsilon st) = t\varepsilon^2 = t,$$

и при любом целом $k$

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t;$$

но $k$ может быть выбрано так, что

$$\frac{q}{2} \leqslant x = kq - \varepsilon st < \frac{3q}{2}$$

эти числа для того, чтобы достигнуть требуемой точности, характеризуемой величиной $\frac{1}{n}$; эта цель была бы, например, достигнута, если бы мы могли указать число $N$, зависящее от $n$, но не зависящее ни от $\alpha$, ни от $\beta$, и такое, что неравенству (40) всегда можно было бы удовлетворить при дополнительном условии

$$|x| \leqslant N.$$

Очевидно, эта новая постановка задачи существенно отличается от той, с которой мы имели дело до сих пор; если прежде (как в теореме 24) точность аппроксимации определялась в зависимости от величины числа $x$, то теперь мы эту точность задаём заранее и спрашиваем себя, наоборот, сколь большим придётся выбрать число $x$ для того, чтобы достигнуть этой заданной точности. Соответственно этому различию в постановке задачи и ответ её получает существенно иной характер; в частности, мы получаем существенно различные результаты для однородного и неоднородного случая.

В случае однородного уравнения ($\beta = 0$) поставленная задача получает весьма простое решение.

Теорема 25. *Каковы бы ни были вещественные числа $n \geqslant 1$ и $\alpha$, найдутся целые числа $x$, $y$, удовлетворяющие неравенствам*

$$0 < x \leqslant n, \ |\alpha x - y| < \frac{1}{n}.$$

*Доказательство.* Если $\alpha$ рационально, $\alpha = \frac{a}{b}$ и $0 < b \leqslant n$, то теорема доказывается тривиальным образом, полагая $x = b$, $y = a$; если $\alpha$ в такой форме представлено быть не может, т. е. если $\alpha$ есть либо иррациональное число, либо рациональная дробь со знаменателем, превосходящим $n$, то, определяя индекс $k$ из соотношения

$$q_k \leqslant n < q_{k+1}$$

(где через $\frac{p_k}{q_k}$ мы обозначаем подходящие дроби числа $\alpha$), мы будем иметь:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n},$$

и, следовательно,

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leqslant n,$$

что и доказывает теорему.

Теперь мы естественно должны поставить вопрос о том, нельзя ли и в случае неоднородного уравнения (37) установить такой же порядок аппроксимации. Другими словами, можно ли утверждать, что для любого иррационального числа $\alpha$ найдётся такое положительное число $C$, что, каковы бы ни были числа $n \geqslant 1$ и $\beta$, существуют целые числа $x$ и $y$, удовлетворяющие неравенствам:

$$0 < x \leqslant Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}\ ?$$

(Очевидно, при этом мы требуем даже меньше того, что доказано для однородного случая, так как допускаем зависимость $C$ от $\alpha$, тогда как в однородном случае $C = 1$ является абсолютной постоянной.) Нетрудно привести некоторые априорные соображения против возможности такого предложения; прежде всего, для рациональных $\alpha$ оно заведомо неверно, ибо в этом случае, как мы видели выше, величина $|\alpha x - y - \beta|$, вообще говоря (т. е. при произвольном $\beta$), не может даже быть сделана как угодно малой; это обстоятельство позволяет ожидать, что если $\alpha$ иррационально, но чрезвычайно близко аппроксимируется рациональными дробями, то величина $|\alpha x - y - \beta|$, хотя и может быть в силу теоремы 24 сделана как угодно малою, однако потребует для этого, при надлежаще выбранном $\beta$ и заданной степени точности, сравнительно больших значений $x$ и $y$. Эти же соображения позволяют далее предполагать, что приближение разности $\alpha x - y$ к любому вещественному числу $\beta$ будет достигаться тем легче, чем хуже число $\alpha$ аппроксимируется рациональными дробями, т. е. чем труднее достигается приближение величины $\alpha x - y$ к нулю; это же, в свою очередь, требует, как мы знаем, чтобы элементы числа $\alpha$ не возрастали слишком быстро.

Все эти предварительные соображения находят себе как подтверждение, так и точное количественное выражение в следующем предложении,

Теорема 26. *Для того чтобы существовало положительное число $C$, обладающее тем свойством, что при любых вещественных $n \geqslant 1$ и $\beta$ найдётся пара целых чисел $x$ и $y$ $(x > 0)$, удовлетворяющих неравенствам:*

$$x \leqslant Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

*необходимо и достаточно, чтобы иррациональное число $\alpha$ представлялось цепной дробью с ограниченными элементами.*

*Доказательство.* Пусть

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots],$$

и пусть $a_i < M$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть, далее, $m \geqslant 1$ и $\beta$ — любое вещественное число. Обозначая через $\frac{p_k}{q_k}$ подходящие дроби числа $\alpha$, определим индекс $k$ из неравенств

$$q_k \leqslant m < q_{k+1};$$

тогда

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{mq_k},$$

или

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{mq_k} \quad (|\delta| \leqslant 1). \tag{41}$$

Далее выберем целое число $t$ так, чтобы иметь

$$|\beta q_k - t| \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2q_k} \quad (|\delta'| \leqslant 1). \tag{42}$$

Наконец, как при доказательстве теоремы 24, найдём пару целых чисел $x$, $y$, удовлетворяющих соотношениям:

$$xp_k - yq_k = t, \quad 0 < x \leqslant q_k. \tag{43}$$

Из (41), (42) и (43) следует:

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| =$$

$$= \left|\frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| < \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}}\left(\frac{q_{k+1}}{q_k}\right) <$$

$$< \frac{1}{m} + \frac{1}{2m}(a_{k+1} + 1) < \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}.$$

До сих пор число $m \geqslant 1$ оставалось совершенно произвольным; если теперь, при данном $n \geqslant 1$, положить $m = \frac{M+3}{2} n$, то мы будем, очевидно, иметь $m > 1$, и, следовательно, на основании предыдущего, выбирая указанным образом числа $x$ и $y$:

$$0 < x \leqslant q_k \leqslant m = \frac{M+3}{2} n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

чем и доказывается первая часть теоремы.

Для доказательства второй части допустим, что среди элементов $a_k$ числа $\alpha$ встречаются сколь угодно большие. В таком случае, как показывает теорема 23, сколь бы мало ни было положительное число $\varepsilon$, найдутся целые числа $q > 0$, $p$, удовлетворяющие неравенству:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2},$$

откуда

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta\varepsilon^2}{q^2} \qquad (|\delta| < 1).$$

Положим теперь $n = \frac{q}{\varepsilon}$ и $\beta = \frac{1}{2q}$; тогда при любых целых $x$, $y$ $(0 < x \leqslant Cn)$ мы будем иметь:

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| = \left|\frac{2(xp - yq) - 1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| >$$

$$> \frac{|2(xp - yq) - 1|}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \geqslant \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}.$$

Но, как бы велико ни было $C$, при достаточно малом $\varepsilon$ мы будем иметь $\frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} > 1$, и, следовательно, для

любых целых $x$, $y$ $(0 < x \leqslant Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n},$$

чем доказывается и вторая часть теоремы.

Резюмируем полученные нами результаты. Исследуя приближённые решения уравнения (37) в целых числах, мы в качестве «нормального» случая должны рассматривать тот, когда точность, характеризуемая величиной $\frac{1}{n}$, может быть достигнута для любого $n \geqslant 1$ при некотором $x < Cn$; где $C$ — постоянная (могущая зависеть от $\alpha$). Однородное (т. е. получающееся при $\beta = 0$) уравнение всегда допускает нормальное решение (теорема 25). Теорема 26 показывает, что общее (неоднородное) уравнение допускает нормальное решение в том и только в том случае, если соответствующее однородное уравнение не имеет «сверхнормального» решения, т. е. если ему нельзя при любом $\varepsilon > 0$ и надлежаще выбранном $n$ удовлетворить с точностью до $\frac{1}{n}$ целыми числами $x > 0$, $y$, из которых $x < \varepsilon n$. С этой точки зрения результат нашего исследования может рассматриваться как разновидность общего закона решения линейных уравнений (алгебраических, интегральных и т. д.): *неоднородное уравнение в общем случае решается «нормально», если соответствующее однородное уравнение не допускает «сверхнормального» решения.*

Заметим ещё, что в теореме 26 мы требовали независимости $C$ от $\beta$; можно было бы, сохраняя тот же результат, допустить, что $C$ является функцией от $\beta$; только доказательство (в его второй части) было бы несколько сложнее.

## § 9. Аппроксимация алгебраических иррациональностей. Трансцендентные числа Лиувилля

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (44)$$

— многочлен степени $n$ с *целыми* коэфициентами $a_0$, $a_1, \ldots, a_n$; число $\alpha$, являющееся корнем такого много-

члена, называется *алгебраическим*. Так как всякое рациональное число $\alpha = \frac{a}{b}$ может быть определено как корень уравнения первой степени $bx - a = 0$, то понятие алгебраического числа, очевидно, является естественным обобщением понятия рационального числа. Если данное алгебраическое число удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$ степени $n$ и не удовлетворяет никакому уравнению низшей степени (с целыми коэфициентами), то его называют *алгебраическим числом степени $n$*; в частности, рациональные числа могут быть определены как алгебраические числа первой степени; число $\sqrt{2}$, будучи корнем многочлена $x^2 - 2$, является алгебраическим числом второй степени, или, как говорят, *квадратической иррациональностью*; подобным же образом определяются иррациональности кубические, четвёртой степени и т. д. Все неалгебраические числа называют *трансцендентными*; к числу последних принадлежат, например, числа $e$ и $\pi$. Ввиду той значительной роли, которую играют алгебраические числа в современной теории чисел, вопросу об их свойствах в отношении аппроксимации рациональными дробями посвящено много специальных исследований. Первым значительным результатом в этом направлении была следующая так называемая теорема Лиувилля.

Теорема 27. *Для всякого вещественного иррационального алгебраического числа $\alpha$ степени $n$ существует такое положительное число $C$, что при любых целых $p$ и $q$ $(q > 0)$*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}.$$

*Доказательство.* Пусть $\alpha$ является корнем многочлена (44). Как известно из алгебры, мы можем написать:

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x), \tag{45}$$

где $f_1(x)$ — многочлен степени $n-1$; при этом легко видеть, что $f_1(\alpha) \neq 0$; в самом деле, в случае $f_1(\alpha) = 0$ многочлен $f_1(x)$ делился бы без остатка на $x - \alpha$, а зна-

чит, многочлен $f(x)$ — на $(x-\alpha)^2$; но в таком случае производный многочлен $f'(x)$ делился бы на $x-\alpha$, т. е. мы имели бы $f'(\alpha)=0$, что невозможно, ибо $f'(x)$ есть многочлен степени $n-1$ с целыми коэфициентами, а $\alpha$ — алгебраическое число степени $n$. Таким образом мы имеем:

$$f_1(\alpha)\neq 0,$$

а следовательно, можно найти такое положительное число $\delta$, что

$$f_1(x)\neq 0 \quad (\alpha-\delta\leqslant x\leqslant \alpha+\delta).$$

Пусть $p$ и $q$ $(q>0)$ — любая пара целых чисел; если $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\delta$, то $f_1\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$, и потому, подставляя в тождество (45) $x=\frac{p}{q}$, мы находим:

$$\frac{p}{q}-\alpha=\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{a_0+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+\ldots+a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}=$$

$$=\frac{a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\ldots+a_np^n}{q^nf_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Числитель последней дроби есть число целое и притом отличное от нуля, так как иначе мы имели бы $\alpha=\frac{p}{q}$, в то время как $\alpha$ по условиям теоремы — число иррациональное. Следовательно, этот числитель по меньшей мере равен единице по абсолютному значению; обозначая через $M$ верхнюю грань функции $f_1(x)$ в интервале $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$, мы поэтому получаем из последнего неравенства:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Mq^n}.$$

В случае же, если

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\delta,$$

мы имеем и подавно

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{\delta}{q^n};$$

обозначая поэтому через $C$ любое положительное число меньшее, чем $\delta$ и $\frac{1}{M}$, мы во всех случаях (т. е. для любых целых $q>0$, $p$) будем иметь:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^n},$$

что и доказывает теорему 27.

Теорема Лиувилля, очевидно, утверждает, что алгебраические числа не допускают такой аппроксимации рациональными дробями, которая по своей точности превосходила бы некоторый определённый порядок, зависящий в основном от степени данного алгебраического числа. Главное историческое значение этой теоремы состояло в том, что она впервые позволила доказать существование трансцендентных чисел и дать конкретные примеры таких чисел. Для этого, как мы видим, достаточно построить число, которое, будучи иррациональным, чрезвычайно близко аппроксимировалось бы рациональными дробями, а в этом отношении, как мы знаем из теоремы 22, наши возможности ничем не ограничены.

Конкретно теорема 27 показывает, что если для любого $C>0$ и любого натурального $n$ существуют целые числа $p$ и $q$ ($q>0$), удовлетворяющие неравенству:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{C}{q^n}, \tag{46}$$

то число $\alpha$ трансцендентно. Но с помощью аппарата цепных дробей очень легко построить сколько угодно таких чисел. Для этого стоит только после того, как уже выбраны элементы $a_0, a_1, \ldots, a_k$, построить подходящую дробь $\frac{p_k}{q_k}$ и взять

$$a_{k+1}>q_k^{k-1},$$

ибо тогда

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}},$$

вследствие чего неравенство (46), очевидно, выполняется для всех достаточно больших значений $k$, каковы бы ни были $C > 0$ и натуральное число $n$.

## § 10. Квадратические иррациональности и периодические цепные дроби

Для квадратических иррациональностей $\alpha$ теорема 27 показывает, что существует такое (зависящее от $\alpha$) положительное число $C$, при котором неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

не может иметь решений в целых $p$ и $q$ $(q > 0)$. В силу теоремы 23 отсюда следует, что элементы всякой квадратической иррациональности ограничены. Однако, для квадратических иррациональностей ещё задолго до Лиувилля Лагранжем было найдено гораздо более содержательное свойство изображающих их цепных дробей, являющееся к тому же и характеристическим. Оказывается, что ряд элементов квадратической иррациональности всегда есть ряд периодический и что, обратно, всякая периодическая цепная дробь изображает некоторую квадратическую иррациональность. Доказательству этого предложения и будет посвящён настоящий параграф.

Условимся называть цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

*периодической*, если существуют такие целые положительные числа $k_0$ и $h$, что для любого $k \geqslant k_0$

$$a_{k+h} = a_k;$$

аналогично десятичным дробям мы будем обозначать такую периодическую дробь следующим образом:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}]. \quad (47)$$

Теорема 28. *Всякая периодическая цепная дробь изображает квадратическую иррациональность и, об-*

*ратно, всякая квадратическая иррациональность изображается периодической цепной дробью.*

*Доказательство.* Первое утверждение доказывается в немногих словах. В самом деле, очевидно, что остатки периодической цепной дроби (47) удовлетворяют соотношению:

$$r_{k+h}=r_k \qquad (k \geqslant k_0).$$

Поэтому в силу формулы (16) гл. I мы имеем для $k \geqslant k_0$:

$$\alpha=\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_{k+h}+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h}+q_{k+h-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_k+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k+q_{k+h-2}}, \quad (48)$$

откуда

$$\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_k+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k+q_{k+h-2}};$$

таким образом число $r_k$ удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэфициентами и, следовательно, является квадратической иррациональностью; но в таком случае первое из равенств (48) показывает, что и $\alpha$ есть квадратическая иррациональность.

Обратное утверждение доказывается несколько сложнее. Пусть число $\alpha$ удовлетворяет квадратному уравнению:

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad (49)$$

с целыми коэфициентами. Подставляя в него вместо $\alpha$ его выражение

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}}$$

через остаток порядка $n$, мы видим, что $r_n$ удовлетворяет уравнению:

$$A_nr_n^2+B_nr_n+C_n=0, \qquad (50)$$

где $A_n$, $B_n$, $C_n$ — целые числа, определяемые формулами:

$$\left.\begin{aligned} A_n&=ap_{n-1}^2+bp_{n-1}q_{n-1}+cq_{n-1}^2,\\ B_n&=2ap_{n-1}p_{n-2}+b(p_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-1})+2cq_{n-1}q_{n-2},\\ C_n&=ap_{n-2}^2+bp_{n-2}q_{n-2}+cq_{n-2}^2, \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

откуда, в частности, следует:

$$C_n = A_{n-1}. \qquad (52)$$

С помощью этих формул легко непосредственно проверить, что

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac, \qquad (53)$$

т. е. что дискриминант уравнения (50) для всех $n$ один и тот же и равен дискриминанту уравнения (49).

Далее, так как

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

то

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad (|\delta_{n-1}| < 1);$$

поэтому первая из формул (51) даёт нам:

$$A_n = a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1} + cq_{n-1}^2 =$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha + c)\,q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1},$$

откуда в силу уравнения (49)

$$|A_n| = \left|2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

и далее на основании равенства (52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

Таким образом коэфициенты $A_n$ и $C_n$ уравнения (50) ограничены по абсолютной величине и, следовательно, при изменении $n$ могут принимать лишь конечное число различных значений. В силу равенства (53) отсюда следует, что и $B_n$ может принимать лишь конечное число различных значений.

Таким образом при возрастании $n$ от 1 до $\infty$ мы можем встретить лишь конечное число различных уравнений (50); но в таком случае $r_n$ может иметь лишь

конечное число различных значений, и потому для надлежаще выбранных $k$ и $h$

$$r_k = r_{k+h};$$

это показывает, что дробь, изображающая $\alpha$, периодическая. Тем самым доказана и вторая часть нашего утверждения.

Для алгебраических иррациональностей более высоких степеней неизвестно никаких свойств изображающих их цепных дробей, аналогичных только что доказанному. Вообще, всё, что известно об аппроксимации алгебраических иррациональностей высших степеней рациональными дробями, исчерпывается элементарными следствиями теоремы Лиувилля и некоторых более новых усиливающих её предложений. Любопытно отметить, что до настоящего времени неизвестно разложение в цепную дробь ни одного алгебраического числа степени выше 2. Неизвестно, может ли такое разложение иметь ограниченные элементы; неизвестно, может ли оно иметь, наоборот, неограниченный ряд элементов и т. д. Вообще, вопросы, связанные с разложением алгебраических чисел выше второй степени в цепные дроби, исключительно трудны и почти ещё не изучены.

## ГЛАВА III

# МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

## § 11. Введение

На протяжении всей предшествующей главы мы видели, что вещественные числа могут быть весьма различны по своим арифметическим свойствам. Помимо основных делений вещественных чисел на рациональные и иррациональные, на алгебраические и трансцендентные, возможен ряд значительно более тонких подразделений этих чисел по целому ряду признаков, характеризующих их арифметическую природу, и прежде всего—по характеру той аппроксимации с помощью рациональных дробей, какую допускают эти числа. Во всех таких случаях мы до сих пор удовлетворялись простым установлением того, что числа, обладающие тем или другим арифметическим свойством, действительно существуют. Так, мы знаем, что существуют числа, допускающие приближённое выражение с помощью рациональных дробей $\frac{p}{q}$ лишь с точностью, порядок которой не выше, чем $\frac{1}{q^2}$ (таковы, например, все квадратические иррациональности); но мы знаем также, что существуют числа, допускающие аппроксимацию более высокого порядка (теорема 22 гл. II). У нас естественно встаёт вопрос, какое же из этих двух противоположных свойств мы должны признать более «общим», какой из этих двух типов вещественных чисел «встречается чаще»?.

Если мы хотим поставленному таким образом вопросу дать точную формулировку, то мы должны иметь в виду,

что всякий раз, когда мы высказываем какое-либо свойство вещественных чисел (например, иррациональность, или трансцендентность, или обладание ограниченным рядом элементов и т. п.), совокупность всех вещественных чисел разбивается по отношению к этому свойству на два множества: 1) множество чисел, обладающих данным свойством, и 2) множество чисел, не имеющих этого свойства. Вопрос, который мы хотим поставить, очевидно, сводится к задаче сравнительного изучения этих двух множеств с целью определить, которое из них охватывает собою больше чисел, и которое—меньше. Но множества вещественных чисел могут быть сравниваемы друг с другом с различных точек зрения и с помощью различных характеристик; можно ставить вопрос об их мощности, об их мере и ряде других измерителей; наиболее интересной как по своим методам, так и по своим результатам оказалась *метрическая* проблематика, изучающая *меру* числовых множеств, задаваемых теми или иными свойствами входящих в них чисел. Соответствующее учение, которое можно назвать *метрической арифметикой континуума*, за последнее время получило значительное развитие и привело к большому количеству простых и интересных закономерностей. Как при всяком изучении арифметической природы иррациональностей, и здесь аппарат цепных дробей является естественным и наилучшим орудием исследования; однако для того чтобы сделать этот аппарат орудием *метрической* арифметики, т. е. чтобы применять его к исследованию *меры* множеств, задаваемых тем или иным арифметическим свойством входящих в него чисел, мы, очевидно, прежде всего должны подвергуть самый этот аппарат детальному и всестороннему метрическому анализу—должны, другими словами, научиться *определять меру множества чисел, разложения которых в цепные дроби обладают тем или другим заранее заданным свойством*. Вопросы этого рода могут иметь весьма различный характер; мы можем спрашивать о мере множества чисел, для которых $a_4=2$, или для которых $q_{10}<1000$, или которые обладают ограниченным рядом элементов, или среди элементов которых не встречается чётных чисел, и т. д., и т. п. Совокупность методов, слу-

жащих для решения подобного рода задач, образует собою *метрическую теорию цепных дробей*, элементам и элементарным приложениям которой и посвящена настоящая глава. При этом, так как от прибавления к данному вещественному числу любого целого числа его основные арифметические свойства не меняются, мы ограничимся во всём дальнейшем рассмотрением вещественных чисел, заключённых между 0 и 1 (т. е. полагаем всегда $a_0=0$). Для метрической теории такое ограничение конечным интервалом является, впрочем, даже необходимым, если мы хотим, чтобы мера множества не оказывалась в общем случае бесконечно большою.

Мы предполагаем у читателя знакомство с основными предложениями теории измерения линейных множеств [1]).

## § 12. Элементы как функции изображаемого числа

Каждое вещественное число $\alpha$ *единственным образом* разлагается в цепную дробь

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots];$$

каждый элемент $a_n$ поэтому однозначно определяется заданием числа $\alpha$, т. е. является однозначной функцией от $\alpha$:

$$a_n=a_n(\alpha).$$

В построении метрической теории цепных дробей первым шагом должно явиться такое изучение природы этой функции, которое позволило бы нам составить себе хотя бы общее представление об её ходе. Этой задаче и посвящён настоящий параграф.

Как мы уже заметили в § 11, мы всюду полагаем $a_0=0$; ради сокращения записи мы будем при этом вместо

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$$

---

[1]) Более чем достаточными для понимания настоящей главы являются сведения, имеющиеся в книге П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, 1933, глава шестая.

писать короче

$$\alpha=[a_1,\ a_2,\ \ldots],$$

полагая, следовательно,

$$[a_1,\ a_2,\ \ldots]=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots}}.$$

Рассмотрим сначала первый элемент $a_1$ как функцию от $\alpha$. Так как

$$\frac{1}{\alpha}=a_1+\frac{1}{a_2+\ldots},$$

то, очевидно, $a_1=\left[\frac{1}{\alpha}\right]$, т. е. $a_1$ есть наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{1}{\alpha}$. Таким образом

$$a_1=1 \text{ для } 1\leqslant\frac{1}{\alpha}<2, \text{ т. е. } \frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1,$$

$$a_1=2 \text{ для } 2\leqslant\frac{1}{\alpha}<3, \text{ т. е. } \frac{1}{3}<\alpha\leqslant\frac{1}{2},$$

$$a_1=3 \text{ для } 3\leqslant\frac{1}{\alpha}<4, \text{ т. е. } \frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{1}{3}, \text{ и. т. д}$$

Вообще

$$a_1=k \text{ для } k\leqslant\frac{1}{\alpha}<k+1, \text{ т. е. } \frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}.$$

Функция $a_1=a_1(\alpha)$ претерпевает таким образом разрыв при всех тех значениях $\alpha$, для которых $\frac{1}{\alpha}$ есть целое число, и безгранично возрастает при $\alpha\to 0$. Её графическое изображение дано на черт. 1.

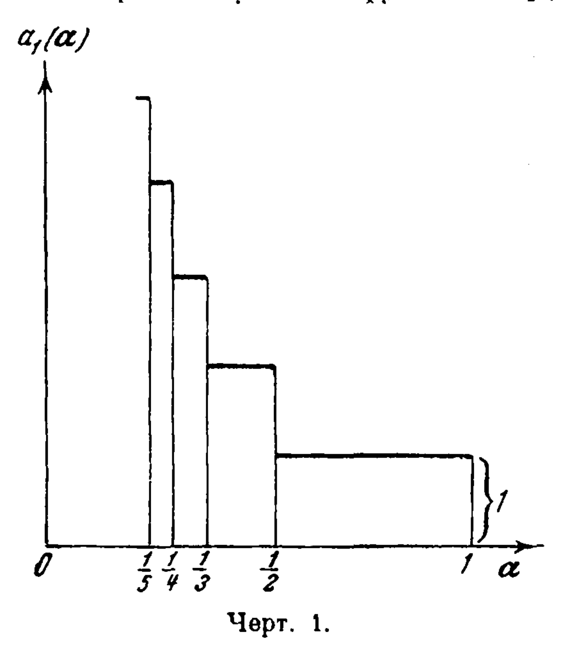
Отметим ещё, что $a_1$ постоянно в каждом из интервалов $\left(\frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}\right)$, которые мы будем называть интервалами *первого ранга*, и что

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\,d\alpha=+\infty.$$

так как этот интеграл, очевидно, эквивалентен расходящемуся ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}.$$

Перейдём теперь к изучению функции $a_2(\alpha)$. С этой




Черт. 1.

целью рассмотрим сначала какой-нибудь неизменный интервал первого ранга:

$$\frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}.$$

В этом интервале всюду $a_1=k$, и, следовательно,

$$\alpha=\frac{1}{k+\frac{1}{r_2}},$$

причём $1\leqslant r_2<\infty$ и $a_2=[r_2]$. По мере того как $r_2$ возрастает от 1 до $\infty$, $\alpha$ возрастает от $\frac{1}{k+1}$ до $\frac{1}{k}$, пробегая,

таким образом, данный интервал первого ранга. При этом очевидно, что

$$a_2 = 1 \text{ при } 1 \leqslant r_2 < 2, \text{ т. е. } \frac{1}{k+1} \leqslant \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{2}},$$

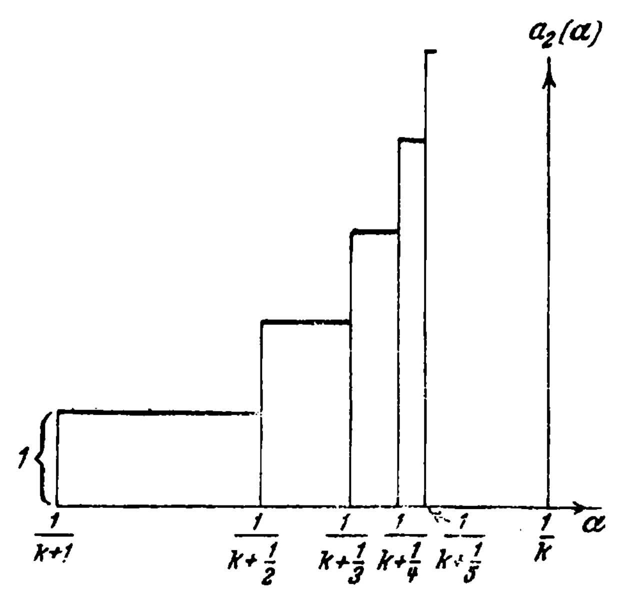
$$a_2 = 2 \text{ при } 2 \leqslant r_2 < 3, \text{ т. е. } \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leqslant \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{3}},$$

$$a_2 = 3 \text{ при } 3 \leqslant r_2 < 4, \text{ т. е. } \frac{1}{k+\frac{1}{3}} \leqslant \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{4}},$$

и вообще

$$a_2 = l \text{ при } l \leqslant r_2 < l+1, \text{ т. е. } \frac{1}{k+\frac{1}{l}} \leqslant \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}.$$

Таким образом в закреплённом нами интервале пер-




Черт. 2.

вого ранга графическое изображение функции $a_2(\alpha)$ имеет вид, показанный на черт. 2.

Функция $a_2(\alpha)$ постоянна в каждом из интервалов

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}}, \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right),$$

которые мы будем называть интервалами *второго ранга*; каждый интервал первого ранга разбивается, следовательно, на счётное множество интервалов второго ранга, идущих *слева направо* (напомним, что интервалы первого ранга образуют последовательность, идущую *справа налево*). Множество точек, в которых $a_1=k$, есть один интервал первого ранга; множество точек, в которых $a_2=l$, есть счётное множество интервалов второго ранга (по одному в каждом из интервалов первого ранга). Каждый интервал первого ранга определяется условием вида $a_1=k$; каждый интервал второго ранга — условиями вида $a_1=k$, $a_2=l$.

Пусть вообще мы определили уже интервалы ранга $n$ и исследовали течение функций $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, ..., $a_n(\alpha)$. Каждая система значений

$$a_1=k_1, \quad a_2=k_2, \ \ldots, \ a_n=k_n \tag{54}$$

определяет собою некоторый интервал $J_n$ ранга $n$. Чтобы исследовать ход функции $a_{n+1}(\alpha)$ в интервале $J_n$, заметим, что произвольное число $\alpha$ этого интервала может быть представлено в виде:

$$\alpha=[k_1, k_2, \ldots, k_n, r_{n+1}], \tag{55}$$

где $r_{n+1}$ принимает всевозможные значения от 1 до $\infty$. Обратно, при любом $r_{n+1}$ $(1<r_{n+1}<\infty)$ выражение (55) даёт нам число $\alpha$, для которого выполняются условия (54) и которое, следовательно, принадлежит интервалу $J_n$; так как $a_{n+1}=[r_{n+1}]$, то мы видим, что внутри каждого интервала ранга $n$, $a_{n+1}(\alpha)$ принимает все целые значения от 1 до $\infty$. Чтобы составить себе более точную картину, условимся обозначать, как обычно, через $\frac{p_k}{q_k}$ подходящие дроби числа $\alpha$. Тогда

$$\alpha=\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}},$$

причём, когда $\alpha$ пробегает данный интервал $J_n$, $r_{n+1}$ возрастает от 1 до $\infty$, а $p_n$, $q_n$, $p_{n-1}$, $q_{n-1}$ остаются постоянными, так как они полностью определяются числами $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, имеющими для всех точек интервала $J_n$ одни и те же значения. В частности, полагая $r_{n+1}=1$ и $r_{n+1}\to\infty$, мы получаем в качестве концов интервала $J_n$ точки

$$\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}} \text{ и } \frac{p_n}{q_n};$$

так как

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_nr_{n+1}+p_{n-1}}{q_nr_{n+1}+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(q_nr_{n+1}+q_{n-1})},$$

то $\alpha$ есть монотонная функция от $r_{n+1}$ в интервале $(1, \infty)$; следовательно, и обратно, $r_{n+1}$, а значит и $a_{n+1}$ — монотонная функция от $\alpha$ в интервале

$$J_n=\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right);$$

таким образом, когда $\alpha$ пробегает интервал $J_n$, $a_{n+1}(\alpha)$ последовательно пробегает значения 1, 2, 3, ..., разбивая интервал $J_n$ на счётное множество интервалов ранга $n+1$. Эта последовательность расположена справа налево при чётном $n$ и слева направо при нечётном $n$.

Таким образом, строение функций $a_n(\alpha)$, по меньшей мере с его качественной стороны, полностью выясняется. Условившись называть интервал (0,1) (единственный) интервалом ранга нуль, мы прежде всего последовательно покрываем его сетью всё более мелких интервалов, помещая в каждый уже построенный интервал ранга $n$ последовательность интервалов ранга $n+1$; эта последовательность располагается справа налево, если $n$ чётно, и слева направо, если $n$ нечётно. Функция $a_{n+1}(\alpha)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ постоянна в каждом из этих интервалов ранга $n+1$; она монотонна и принимает все целые значения от 1 до $\infty$ в каждом интервале ранга $n$. Каждой системе значений

$$a_1=k_1,\ a_2=k_2,\ \ldots,\ a_n=k_n$$

соответствует единственный определённый интервал ранга $n$, и обратно. Более общая система значений

$$a_{m_1} = k_1, \ a_{m_2} = k_2, \ \ldots, \ a_{m_s} = k_s$$

определяет собою, вообще говоря, счётное множество интервалов.

Первый вопрос, который естественно ставит себе метрическая теория цепных дробей, состоит в определении меры множества тех точек отрезка (0, 1), для которых $a_n = k$; мы уже знаем, что это множество всегда представляет собою систему интервалов; речь идёт, следовательно, об определении суммы длин этих интервалов. Задача эта в первом приближении решается очень легко.

Условимся во всём дальнейшем обозначать через

$$E\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_s \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}$$

множество точек отрезка (0, 1), для которых выполняются условия:

$$a_{n_1} = k_1, \ a_{n_2} = k_2, \ \ldots, \ a_{n_s} = k_s;$$

здесь, разумеется, все $n_i$ и $k_i$ — натуральные числа, причём все $n_i$ различны между собою. Мы знаем уже, что такое множество всегда представляет собою систему интервалов. В частности, множество

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

есть, как мы знаем, интервал ранга $n$, характеризуемый соотношениями:

$$a_i = k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно, мы всегда имеем:

$$\sum_{k_l=1} E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_l, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_l, & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix} =$$

$$= E\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_{l-1}, & n_{l+1}, & \ldots, & n_s \\ k_1, & \ldots, & k_{l-1}, & k_{l+1}, & \ldots, & k_s \end{pmatrix}. \qquad (56)$$

Условимся, наконец, обозначать через $\mathfrak{M}E$ меру множества $E$.

Рассмотрим теперь произвольный интервал

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

ранга $n$ и содержащийся в нём интервал

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n, & s \end{pmatrix}$$

ранга $n+1$. Мы уже знаем, что концами интервала $J_n$ служат точки

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{и} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

где вообще через $\frac{p_k}{q_k}$ обозначена подходящая дробь порядка $k$ цепной дроби

$$[k_1, k_2, \ldots, k_n].$$

С другой стороны, для всех точек интервала $J_{n+1}^{(s)}$ мы имеем:

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

откуда

$$s \leqslant r_{n+1} < s+1.$$

Таким образом, среди всех точек

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

интервала $J_n$ интервалу $J_{n+1}^{(s)}$ будут принадлежать те, для которых $s \leqslant r_{n+1} < s+1$, откуда, в частности, следует, что концами интервала $J_{n+1}^{(s)}$ будут точки

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_n (s+1) + p_{n-1}}{q_n (s+1) + q_{n-1}}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{M}J_n = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n (s+1) + p_{n-1}}{q_n (s+1) + q_{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{[q_n s + q_{n-1}][q_n (s+1) + q_{n-1}]} =$$

$$= \left| \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)} \right|,$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)};$$

здесь второй множитель правой части, очевидно, всегда меньше, чем 2, и больше, чем $\frac{1}{3}$ $\Big($последнее в силу того, что $\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}} \geqslant 1$ и $1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n} < 3\Big)$; поэтому мы получаем:

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2}. \tag{57}$$

Это показывает, что в любом интервале ранга $n$ тот интервал ранга $n+1$, который характеризуется значением $a_{n+1} = s$, занимает часть данного интервала порядка $\frac{1}{s^2}$. Весьма важно, что устанавливаемые неравенствами (57) границы совершенно не зависят не только от чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, но даже и от ранга $n$ и определяются исключительно числом $s$. Переписав эти неравенства в виде:

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2},$$

суммируя по всем интервалам $J_n$ ранга $n$ (или, что то же, по $k_1, k_2, \ldots, k_n$ в пределах от 1 до $\infty$) и замечая, наконец, что при этом, очевидно,

$$\sum \mathfrak{M} J_n = 1 \quad \text{и} \quad \sum \mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M} E\binom{n+1}{s},$$

мы находим:

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M} E\binom{n+1}{s} < \frac{2}{s^2},$$

чем в первом приближении и решается поставленная нами задача. Мы видим, что *мера множества точек, в которых некоторый определённый элемент имеет данное значение $s$, всегда заключена между $\frac{1}{3s^2}$ и $\frac{2}{s^2}$ (и есть, следовательно, в частности величина порядка $\frac{1}{s^2}$)*.

## § 13. Метрическая оценка роста элементов

Мы теперь располагаем уже достаточными данными для решения задач о мере множеств, в определение которых входит бесконечное число элементов. В качестве первого примера такой задачи мы докажем следующее простое предложение.

Теорема 29. *Множество всех чисел отрезка* (0, 1) *с ограниченными элементами имеет меру нуль.*

*Доказательство.* Обозначим через $E_M$ множество чисел отрезка (0, 1), все элементы которых меньше, чем $M$. Пусть $J_n$ — какой-нибудь интервал ранга $n$, точки которого подчинены условиям:

$$c_i < M \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{58}$$

точки интервала $J_n$, удовлетворяющие дополнительному условию $a_{n+1} = k$, образуют интервал ранга $n+1$, который мы обозначим через $J_{n+1}^{(k)}$. В силу первого из неравенств (57)

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

откуда

$$\mathfrak{M} \sum_{k>M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k>M} \frac{1}{k^2} >$$

$$> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)^2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n,$$

а так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n,$$

то, следовательно,

$$\mathfrak{M} \sum_{k<M} J_{n+1}^{(k)} > \left\{1 - \frac{1}{3(M+1)}\right\} \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n, \tag{59}$$

где положено

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M+1)},$$

причём, очевидно, $\tau < 1$, если $M > 0$.

Обозначая через $E_M^{(n)}$ множество чисел отрезка $(0, 1)$, характеризуемых условиями (58), мы из неравенства (59) видим, что часть множества $E_M^{(n+1)}$, заключённая в некотором интервале $J_n$ ранга $n$, имеет меру меньшую, чем $\tau \mathfrak{M} J_n$; так как, очевидно, интервал ранга $n$, не принадлежащий множеству $E_M^{(n)}$ [т. е. не удовлетворяющий условиям (58)], не может содержать ни одной точки множества $E_M^{(n+1)}$, то, суммируя неравенство (59) по всем интервалам ранга $n$, входящим в множество $E_M^{(n)}$, мы получаем:

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}; \tag{60}$$

последовательное применение этого неравенства, очевидно, даёт нам

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M} E_M^{(1)} \qquad (n \geqslant 1),$$

откуда

$$\mathfrak{M} E_M^{(n)} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

так как $\tau < 1$. Но определённое нами выше множество $E_M$, очевидно, содержится в каждом из множеств $E_M^{(n)}$, вследствие чего

$$\mathfrak{M} E_M = 0.$$

Полагая теперь

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

мы будем иметь:

$$\mathfrak{M} E \leqslant \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_M = 0.$$

Но всякое число с ограниченными элементами принадлежит, очевидно, множеству $E_M$ при достаточно большом $M$, а значит принадлежит и множеству $E$, чем теорема и доказана.

Мы знаем (теорема 23, гл. II), что числа с ограниченными элементами — это такие числа $\alpha$, которые допускают приближённое выражение рациональными дробями не лучше, чем по закону

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

(к этим числам принадлежат, между прочим, все квадратические иррациональности). Мы видим теперь, что все такие числа образуют лишь множество меры нуль; иными словами, *почти все* (т. е. все за исключением множества меры нуль) числа допускают лучшую аппроксимацию рациональными дробями. Очевидно, что основной задачей метрической теории аппроксимации является вопрос о том, какова мера множества чисел, допускающих ту или другую заданную степень приближения с помощью рациональных дробей. В частности — каков наилучший закон аппроксимации, допускаемый *почти всеми* (т. е. всеми кроме множества меры нуль) числами; иначе говоря, в каких пределах закон, устанавливаемый неравенством (61), может быть улучшен, если мы условимся пренебрегать множеством чисел $\alpha$, имеющим меру нуль.

Решение этой задачи мы дадим в следующем параграфе; здесь же мы докажем ещё следующее предложение.

Теорема 30. *Пусть $\varphi(n)$ произвольная положительная функция натурального аргумента $n$; неравенство*

$$a_n = a_n(x) \geqslant \varphi(n) \tag{62}$$

*для почти всех $x$ выполняется бесконечное множество раз, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ расходится; напротив, неравенство (62) для почти всех $x$ выполняется не более конечного числа раз, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ сходится.*

Предварительное замечание. В частности, полагая функцию $\varphi(n)$ равной постоянному положительному числу $M$, мы заключаем из теоремы 30, что множество $E_M$, которым мы пользовались при доказательстве теоремы 29, есть множество меры нуль. Таким образом теорему 29 можно рассматривать как один из простейших частных случаев теоремы 30.

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы доказывается совершенно аналогично теореме 29. Пусть $J_{m+n}$ — интервал ранга $m+n$, для всех точек которого

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{63}$$

(на $a_1, a_2, \ldots, a_m$ мы никаких условий не налагаем). Сохраняя обозначения, введённые нами при доказательстве теоремы 29, мы найдём аналогично неравенству (59):

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\} \mathfrak{M} J_{m+n}.$$

Суммируя это неравенство по всем интервалам ранга $m+n$, подчинённым условиям (63), и обозначая множество всех чисел отрезка (0, 1), удовлетворяющих этим условиям, через $E_{m,n}$, мы, очевидно, находим:

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+n+1))}\right\} \mathfrak{M} E_{m,n};$$

последовательное же применение этого неравенства даёт:

$$\mathfrak{M}E_{m,n} < \mathfrak{M}E_{m,1} \prod_{i=2}^{n} \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}\right\}.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ расходится, то и ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}$$

при любом $m$, очевидно, расходится, а отсюда, как известно из теории бесконечных произведений, следует, что произведение

$$\prod_{i=2}^{n} \left\{1 - \frac{1}{3(1+\varphi(m+i))}\right\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом мы при любом $m$ имеем:

$$\mathfrak{M}E_{m,n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Но всякое число $\alpha$, для которого

$$a_{m+i} < \varphi(m+i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

принадлежит, очевидно, всем множествам

$$E_{m,n} (n = 1, 2, \ldots);$$

поэтому множество всех таких чисел, которое мы обозначим через $E_m$, должно иметь меру нуль. Полагая, наконец,

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_m + \ldots = E,$$

мы видим, что $\mathfrak{M}E = 0$; но всякое число $\alpha$, для которого неравенство (62) выполняется не более конечного числа раз, должно, очевидно, при достаточно большом $m$ принадлежать множеству $E_m$, а следовательно, должно входить и в множество $E$. Этим доказано первое утверждение теоремы.

Пусть теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ сходится. Пусть $J_n$ — один из интервалов ранга $n$, а $J_{n+1}^{(k)}$ — интервал ранга $n+1$, содержащийся в $J_n$ и определяемый дополнительным условием $a_{n+1}=k$. В силу второго из неравенств (57) мы имеем:

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

откуда

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geqslant \varphi(n+1)} J_{n+1}^{(k)} < 2J\mathfrak{M}_n \sum_{k \geqslant \varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{M} J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2} <$$

$$< 2\mathfrak{M} J_n \left\{ \frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty} \frac{du}{u^2} \right\} = \frac{4\mathfrak{M} J_n}{\varphi(n+1)}.$$

Обозначая через $F_n$ множество чисел отрезка (0,1), для которых $a_n \geqslant \varphi(n)$, и суммируя полученное неравенство по всем интервалам $J_n$ ранга $n$, мы находим:

$$\mathfrak{M} F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)},$$

так как $\Sigma \mathfrak{M} J_n = 1$. Таким образом меры множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ образуют сходящийся ряд. Обозначая через $F$ множество таких чисел отрезка (0,1), которые принадлежат бесконечному числу множеств $F_n$, мы поэтому имеем[1]):

$$\mathfrak{M} F = 0.$$

---

[1]) Это — известное предложение метрической теории множеств; впрочем, вот доказательство: очевидно, что множество $F$ при любом $m$ содержится в множестве $\sum_{n=m}^{\infty} F_n$, мера которого не превышает $\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M} F_n$, и следовательно, при достаточно большом $m$, может быть сделана как угодно малою.

Но множество $F$, очевидно, есть как раз множество чисел, для которых неравенство (62) выполняется бесконечное множество раз. Таким образом доказано и второе утверждение теоремы.

## § 14. Метрическая оценка роста знаменателей подходящих дробей. Основная теорема метрической теории аппроксимации

Теорема 31. *Существует такое абсолютно постоянное положительное число $B$, что почти всюду при достаточно большом $n$*

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

Предварительное замечание. В § 4 гл. I (теорема 12) мы видели, что знаменатели $q_n$ для *всех* чисел $\alpha$ возрастают с ростом $n$ не медленнее, чем некоторая геометрическая прогрессия с абсолютно постоянным знаменателем. Теорема 31 показывает, что для *почти всех* $\alpha$ числа $q_n$ растут не быстрее, чем некоторая другая геометрическая прогрессия, также с абсолютно постоянным знаменателем. Это положение вещей можно выразить ещё так: существуют такие две абсолютные постоянные $a$, $A$ $(1 < a < A)$, что для почти всех чисел $\alpha$ отрезка $(0, 1)$ при достаточно большом $n$

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A.$$

На самом деле имеет место значительно более сильное предложение: существует такая абсолютная постоянная $\gamma$, что почти всюду

$$\sqrt[n]{q_n} \to \gamma \qquad (n \to \infty);$$

однако доказательство этой теоремы значительно сложнее и требует для своего проведения тех более глубоких вспомогательных средств, с которыми мы ознакомимся в § 15 и 16. К сожалению, рамки настоящей книги не позволяют поместить в ней этого доказательства. Впрочем, для нашей ближайшей основной цели — теоремы 32 — того свойства чисел $q_n$, о котором говорит теорема 31, совершенно достаточно.

*Доказательство.* Обозначим через $E_n(g)$ $(n > 0,\ g \geqslant 1)$ множество чисел отрезка (0,1), для которых

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant g;$$

очевидно, что это множество представляет собою систему интервалов ранга $n$; длина какого-либо из этих интервалов равна, как мы знаем из § 12:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1)^2},$$

так как последовательное применение очевидного неравенства

$$q_n > a_n q_{n-1}$$

даёт:

$$q_n > a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1.$$

Поэтому

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \ldots a_2 a_1^2}, \tag{64}$$

где суммирование распространяется на все комбинации натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие неравенству $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant g$. Чтобы оценить эту сумму, заметим, что

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leqslant 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i+1)} =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \ldots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2},$$

и, следовательно,

$$\sum_{a_1, a_2, \ldots a_n \geqslant g} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right\} \leqslant 2^n J_n(g),$$

где $J_n(g)$ есть $n$-кратный интеграл

$$\iint \ldots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2},$$

распространённый на область

$$x_i \geqslant 1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n \geqslant g.$$

При $g \leqslant 1$ эта область становится, очевидно, областью $1 \leqslant x_i < \infty \, (i=1, 2, \ldots, n)$, и мы получаем:

$$J_n(g) = \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \right\}^n = 1 \qquad (g \leqslant 1). \qquad (65)$$

Покажем теперь, что при $g > 1$

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!}; \qquad (66)$$

в самом деле, при $n=1$ это равенство получает вид:

$$\int_g^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{g},$$

т. е. оказывается верным; допуская же, что оно выполняется для $n=k$, мы имеем:

$$J_{k+1}(g) = \int_1^\infty \frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g} \int_0^g J_k(u)\, du =$$
$$= \frac{1}{g} \left\{ \int_0^1 J_k(u)\, du + \int_1^g J_k(u)\, du \right\}.$$

Выражая в первом интеграле $J_k(u)$ по формуле (65), а во втором — по формуле (66), которую для $n=k$, $g \geqslant 1$ мы предположили уже установленной, мы находим:

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lg g)^{i+1}}{(i+1)!} \right\} = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lg g)^i}{i!},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lg g)^i}{i!}.$$

В частности, полагая $g = e^{An}$, где $A > 1$ постоянно, мы будем иметь:

$$\mathfrak{M} E_n(e^{An}) < e^{n(\lg 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

В полученной сумме, как легко видеть, каждый член меньше, чем

$$\frac{(An)^n}{n!};$$

поэтому, пользуясь для оценки факториала формулой Стирлинга и обозначая в дальнейшем через $C_1$, $C_2$ положительные абсолютные константы, мы будем иметь:

$$\mathfrak{M} E_n(e^{An}) < e^{n(\lg 2 - A)} n \frac{(An)^n}{n!} <$$
$$< C_1 e^{n(\lg 2 - A)} \frac{n(An)^n}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} < C_2 \sqrt{n}\, e^{-n(A - \lg A - \lg 2 - 1)}.$$

Но если $A$ достаточно велико, то

$$A - \lg A - \lg 2 - 1 > 0,$$

и, следовательно, $\mathfrak{M} E_n(e^{An})$ меньше, чем $n$-й член некоторого сходящегося ряда. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n(e^{An})$$

таким образом сходится, то всякое число отрезка (0,1) за исключением множества меры нуль принадлежит не более чем конечному числу множеств $E_n(e^{An})$; но это означает, что для почти всех чисел отрезка (0,1) мы должны иметь при достаточно большом $n$

$$a_1 a_2 \ldots a_n < e^{An},$$

а так как

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2a_n q_{n-1},$$

и, следовательно,

$$q_n < 2^n a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1,$$

то почти всюду при достаточно большом $n$

$$q_n < 2^n e^{An} = e^{Bn},$$

где положено $B = A + \lg 2$; этим теорема 31 доказана.

Полученный результат, имеющий и достаточный самостоятельный интерес, особенно важен нам в данный момент потому, что он позволяет дать простое решение основной задачи метрической теории аппроксимации, поставленной нами ещё в предыдущем параграфе.

Теорема 32. *Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция положительного аргумента $x$, причём $xf(x)$ — функция невозрастающая. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q} \tag{67}$$

*имеет для почти всех $\alpha$ бесконечное множество решений в целых $p$ и $q$ ($q>0$), если интеграл*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{68}$$

*расходится; напротив, неравенство* (67) *имеет для почти всех $\alpha$ не более конечного числа решений в целых $p$ и $q$ ($q>0$), если интеграл* (68) *сходится.*

Предварительное замечание. В частности в силу теоремы 32, например, неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\lg q}$$

имеет почти всюду бесконечное множество решений, напротив, неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\lg^{1+\varepsilon}q}$$

имеет при всяком постоянном $\varepsilon>0$ почти всюду не более конечного числа решений. По этим данным мы можем составить себе примерное представление о том, насколько изменяется общий закон приближения, если мы условимся пренебрегать множеством меры нуль.

*Доказательство.* 1) Пусть интеграл (68) расходится. Положим

$$\varphi(x)=e^{Bx}f(e^{Bx}),$$

где $B$ — постоянная, фигурирующая в теореме 31. Тогда интеграл

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx = \frac{1}{B}\int_{Ba}^{BA} f(u)\,du,$$

где $A > a > 0$, безгранично возрастает при $A \to \infty$, а так как функция $\varphi(x)$ по условиям теоремы — невозрастающая, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

расходится. В силу теоремы 30 мы отсюда заключаем, что почти всюду неравенство

$$a_{i+1} \geqslant \frac{1}{\varphi(i)}$$

выполняется для бесчисленного множества значений $i$ Но при выполнении этого неравенства мы имеем:

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leqslant \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leqslant \frac{1}{a_{i+1} q_i^2} \leqslant \frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \qquad (69)$$

В силу теоремы 31 мы имеем почти всюду при достаточно большом $i$

$$q_i < e^{Bi},$$

откуда

$$i > \frac{\lg q_i}{B};$$

поэтому неравенство (69) почти всюду при достаточно большом $i$ приводит к неравенству:

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{\lg q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i};$$

это последнее неравенство выполняется, таким образом, почти всюду для бесчисленного множества значений $i$, чем и доказывается первое утверждение теоремы.

2) Допустим теперь, что интеграл (68), а следовательно, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится. Обозначим через $E_n$ множество чисел $\alpha$ отрезка (0,1), которые при подходяще выбранном целом $k$ удовлетворяют неравенству:

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

$\Big[$очевидно, множество $E_n$ есть просто совокупность интервалов длины $\frac{2f(n)}{n}$, имеющих свои центры в точках $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, и интервалов $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ и $\left(1 - \frac{f(n)}{n}, 1\right)\Big]$. Мы имеем:

$$\mathfrak{M}E_n \leqslant 2f(n)$$

$\left(\text{знак} < \text{имеет место в случае } f(n) > \frac{1}{2}\right)$. Таким образом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

сходится; отсюда мы заключаем, как мы это делали уже неоднократно, что почти всякое число $\alpha$ отрезка (0,1) может принадлежать не более чем конечному числу множеств $E_n$, а это, очевидно, означает, что почти все числа $\alpha$ отрезка (0,1) при достаточно большом целом положительном $q$ и любом целом $p$ удовлетворяют неравенству:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{f(q)}{q},$$

чем доказывается и второе утверждение теоремы.

В следующем параграфе мы познакомимся с методом, который позволяет решать значительно более глубокие задачи метрической теории цепных дробей.

## § 15. Проблема Гаусса и теорема Кузьмина

В настоящем параграфе мы рассмотрим проблему, которая исторически была первой задачей метрической теории цепных дробей. Эта задача, поставленная ещё Гауссом, получила своё разрешение лишь в 1928 г.

Полагая, как обычно,

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots],$$
$$r_n = r_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

обозначим через $z_n = z_n(\alpha)$ величину цепной дроби

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

т. е. положим

$$z_n = r_n - a_n.$$

Очевидно, что всегда

$$0 \leqslant z_n < 1;$$

обозначим через $m_n(x)$ меру множества чисел $\alpha$ отрезка (0,1), для которых

$$z_n(\alpha) < x.$$

В одном из своих писем к Лапласу Гаусс утверждал, что ему удалось найти доказательство теоремы, в силу которой

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1);$$

там же он указывал на то, что весьма желательно было бы оценить порядок малости разности

$$m_n(x) - \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \tag{70}$$

при больших значениях $n$, что, по его словам, ему совершенно не удалось. Доказательство Гаусса, повидимому, нигде не было опубликовано; других доказательств этого предложения также не было известно вплоть до 1928 г., когда появилось доказательство утверждения Гаусса, найденное Р. О. Кузьминым; вместе с тем, Р. О. Кузьмин нашёл и очень хорошую оценку для разности (70). Задачей настоящего параграфа является изложение этих результатов Р. О. Кузьмина, а также

и некоторых их обобщений, нужных нам для дальнейшего[1]).

Уже Гауссу было известно, что последовательность функций

$$m_0(x), m_1(x), m_2(x), \ldots, m_n(x), \ldots$$

удовлетворяет функциональному уравнению:

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} (0 \leqslant x \leqslant 1, n \geqslant 0); \quad (71)$$

в самом деле, неравенство

$$z_{n+1} < x$$

в силу очевидного соотношения

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

выполняется в том и только том случае, если при надлежаще выбранном целом положительном $k$ выполняются неравенства:

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leqslant \frac{1}{k};$$

а так как мера множества чисел, удовлетворяющих этим неравенствам, есть, очевидно,

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right),$$

то отсюда и вытекает соотношение (71).

Легко непосредственно проверить, что функция

$$\varphi(x) = C \lg(1+x)$$

удовлетворяет при любом постоянном $C$ соотношению:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\},$$

что, вероятно, и послужило Гауссу указанием на правильное выражение предела функции $m_n(x)$ при $n \to \infty$.

---

[1]) Р. О. Кузьмин, подобно Гауссу, формулирует полученные им результаты в терминах теории вероятностей, что, конечно, не меняет их метрического содержания.

Формальное диференцирование уравнения (71) даёт:

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right); \qquad (72)$$

нетрудно убедиться, что соотношение (72) выполняется и по существу; в самом деле, так как, очевидно, $z_0(\alpha) = \alpha$, то $m_0(x) = x$, и, следовательно, $m'_0(x) = 1$; если же вообще при каком-либо $n$ функция $m'_n(x)$ ограничена и непрерывна, то ряд, стоящий в правой части соотношения (72), равномерно сходится в отрезке (0,1); сумма этого ряда поэтому также ограничена, непрерывна и равна $m'_{n+1}(x)$ по известной теореме о почленном диференцировании рядов. Таким образом соотношение (72) доказывается посредством индукции.

Уравнение (72) значительно удобнее для исследования, чем уравнение (71). К нему относится основной результат Р. О. Кузьмина, к доказательству которого мы теперь и переходим.

Теорема 33. *Пусть* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ — *последовательность вещественных функций, определённых на отрезке* (0, 1) *и удовлетворяющих на этом отрезке соотношению*:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \qquad (n \geqslant 0). \qquad (73)$$

*Если для* $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$0 < f_0(x) < M \quad \text{и} \quad |f'_0(x)| < \mu,$$

*то*

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \theta A e^{-\lambda\sqrt{n}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

*где*

$$a = \frac{1}{\lg 2} \int_0^1 f_0(z)\, dz, \qquad |\theta| < 1,$$

$\lambda$ — *абсолютная положительная постоянная, и* $A$ — *положительная постоянная, зависящая только от* $M$ *и* $\mu$.

Ввиду сложности доказательства мы предпошлём ему несколько элементарных лемм.

Лемма 1. *Для любого* $n \geqslant 0$

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2}, \tag{74}$$

*где* $\left(\frac{p_n}{q}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ *— любой интервал ранга* $n$ *и где суммирование производится по всем интервалам ранга* $n$ (*или, что то же, по элементам* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *в пределах от* 1 *до* $\infty$).

*Доказательство.* Для $n = 0$ соотношение (74) становится тривиальным, так как в этом случае имеется единственный интервал (0,1), причём $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Предполагая же, что соотношение (74) справедливо для некоторого $n$, мы в силу основного уравнения (73) имеем:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + \frac{1}{k+x} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}}\right) \frac{1}{\left(q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}\right)^2} =$$

$$= \sum^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} f_0\left\{\frac{(p_n k + p_{n-1}) + xp_n}{(q_n k + q_{n-1}) + xq_n}\right\} \frac{1}{\{(q_n k + q_{n-1}) + xq_n\}^2} =$$

$$= \sum^{(n+1)} f_0\left(\frac{p_{n+1} + xp_n}{q_{n+1} + xq_n}\right) \frac{1}{(q_{n+1} + xq_n)^2},$$

ч. и т. д.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 33 *для* $n \geqslant 0$

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M.$$

*Доказательство.* Диференцируя почленно соотношение (74), мы находим:

$$f_n'(x) = \sum^{(n)} f_0'(u) \frac{(-1)^{n-1}}{(q_n + xq_{n-1})^4} - 2 \sum^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + xq_{n-1})^3},$$

где положено

$$u=\frac{p_n+xp_{n-1}}{q_n+xq_{n-1}},$$

и законность почленного диференцирования следует из равномерной сходимости обеих сумм правой части для $0\leqslant x\leqslant 1$. Замечая, что

$$\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}<\frac{2}{q_n(q_n+q_{n-1})}$$

и что в силу теоремы 12 гл. I

$$q_n(q_n+q_{n-1})>q_n^2>2^{n-1},$$

а также учитывая очевидное соотношение:

$$\sum^{(n)}\frac{1}{q(q_n+q_{n-1})}=\sum^{(n)}\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right|=1,$$

мы получаем в силу условий теоремы 33:

$$|f_n'(x)|<\frac{\mu}{2^{n-3}}+4M.$$

ч. и т. д.

Лемма 3. *Если*

$$\frac{t}{1+x}<f_n(x)<\frac{T}{1+x}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

*то и*

$$\frac{t}{1+x}<f_{n+1}(x)<\frac{T}{1+x}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

*Доказательство.* В условиях леммы основное соотношение (73) даёт:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t}{1+\frac{1}{k+x}}\frac{1}{(k+x)^2}<f_{n+1}(x)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T}{1+\frac{1}{k+x}}\frac{1}{(k+x)^2},$$

или

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)}<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)},$$

или, что то же,

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right),$$

или, наконец,

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x},$$

ч. и т. д.

Лемма 4.

$$\int_0^1 f_n(z)\,dz = \int_0^1 f_0(z)\,dz \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

*Доказательство.* В силу основного соотношения (73) для $n > 0$

$$\int_0^1 f_n(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right)\frac{dz}{(k+z)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)\,du = \int_0^1 f_{n-1}(u)\,du,$$

откуда посредством индукции и вытекает утверждение леммы 4.

*Доказательство* теоремы 33. Функция $f_0(x)$ по условию диференцируема, а значит и непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$; будучи по условию положительной в этом отрезке, она имеет в нём, следовательно, некоторый положительный минимум, который мы обозначим через $m$; из условий $m \leqslant f_0(x) < M$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, очевидно, вытекает:

$$\frac{m}{2(1+x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1+x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

или

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где положено

$$g = \frac{m}{2}, \quad G = 2M.$$

Положим теперь

$$f_n(x) - \frac{g}{1+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В силу леммы 3 функция $F(x)=\frac{g}{1+x}$ удовлетворяет уравнению:

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1}{(k+x)^2}$$

(что, впрочем, легко проверить и непосредственно); отсюда, очевидно, следует, что последовательность функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\varphi_n(x),\ \ldots$$

удовлетворяет уравнению (73), а потому для неё имеют место и все выводы, сделанные нами из этого уравнения, в частности — соотношение (74). Таким образом, полагая, как прежде, для краткости

$$u=\frac{p_n+xp_{n-1}}{q_n+xq_{n-1}},$$

мы будем иметь:

$$\varphi_n(x)=\sum^{(n)}\varphi_0(u)\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2},$$

откуда в силу очевидных неравенств

$$q_n+xq_{n-1}\leqslant q_n+q_{n-1}<2q_n \quad \text{и} \quad \varphi_0(u)>0$$

мы находим:

$$\varphi_n(x)>\frac{1}{2}\sum^{(n)}\varphi_0(u)\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}. \tag{75}$$

С другой стороны, теорема о среднем значении даёт нам:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_0(z)\,dz=\frac{1}{2}\sum^{(n)}\varphi_0(u')\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}, \tag{76}$$

где $u'$ — одна из точек интервала $\left(\frac{p_n}{q_n},\ \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$, а $\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}$ — длина этого интервала. Соотношения (75) и (76) дают нам:

$$\varphi_n(x)-\frac{1}{2}\int_0^1\varphi_0(z)\,dz>\frac{1}{2}\sum^{(n)}\{\varphi_0(u)-\varphi_0(u')\}\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}. \tag{77}$$

Но так как, очевидно,

$$|\varphi_0(x)| \leqslant |f_0'(x)| + g < \mu + g \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

то

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu + g)|u - u'| < \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \\ < \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}},$$

вследствие чего неравенство (77) даёт нам:

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz - \frac{\mu + g}{2^n} = l - \frac{\mu + g}{2^n},$$

где положено

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz.$$

Таким образом мы получаем:

$$f_n(x) > \frac{g}{1+x} + l - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + l - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1+x} = \frac{g_1}{1+x}.$$

Совершенно подобным образом, вводя в рассмотрение последовательность функций

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и проделав ход аналогичных рассуждений, мы придём к неравенству:

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x},$$

где положено

$$l' = \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,dz.$$

Так как $l > 0$ и $l' > 0$, то при достаточно большом $n$

$$g < g_1 < G_1 < G$$

и

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G);$$

а так как

$$l+l'=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{G-g}{1+z}\,dz=(G-g)\,\frac{\lg 2}{2},$$

то

$$G_1-g_1<(G-g)\,\delta+2^{-n+2}(\mu+G),$$

где

$$\delta=1-\frac{\lg 2}{2}<1$$

— абсолютная положительная постоянная.

Резюмируем полученный нами результат. *Из условий*

$$\frac{g}{1+x}<f_0(x)<\frac{G}{1+x}, \quad |f_0'(x)|<\mu$$

*мы получили, что при достаточно большом* $n$

$$\frac{g_1}{1+x}<f_n(x)<\frac{G_1}{1+x},$$

*где* $g<g_1<G_1<G$, $\quad G_1-g_1<(G-g)\,\delta+2^{-n+2}(\mu+G)$.

Беря теперь в качестве исходной функции $f_n(x)$ вместо $f_0(x)$ и повторяя проведенный ход рассуждений, мы, очевидно, придём к соотношению:

$$\frac{g_2}{1+x}<f_{2n}(x)<\frac{G_2}{1+x},$$

причём

$$g_1<g_2<G_2<G_1,$$
$$G_2-g_2<\delta\,(G_1-g_1)+2^{-n+2}(\mu_1+G_1),$$

где $\mu_1$ — положительное число, для которого

$$|f_n'(x)|<\mu_1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Продолжая этот процесс далее, мы приходим, вообще, к соотношению:

$$\frac{g_r}{1+x}<f_{rn}(x)<\frac{G_r}{1+x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1;\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причём для $r>0$

$$g_{r-1}<g_r<G_r<G_{r-1},$$
$$G_r-g_r<\delta\,(G_{r-1}-g_{r-1})+2^{-n+2}(\mu_{r-1}+G_{r-1}), \tag{78}$$

где $\mu_{r-1}$ — положительное число, для которого

$$|f'_{(r-1)n}(x)| < \mu_{r-1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

На основании леммы 2 мы можем положить

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

и, следовательно, если $n$ выбрано достаточно большим,

$$\mu_r < 5M \qquad (r = 1, 2, \ldots);$$

поэтому последовательное применение неравенства (78) для $r = 1, 2, \ldots, n$ даёт нам:

$$G_n - g_n < (G - g)\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\delta^{n-1} + \\ + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \ldots + 7M\delta + 7M\}.$$

Так как $\delta < 1$ есть абсолютная постоянная, то отсюда, очевидно, следует:

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n},$$

где $\lambda > 0$ — абсолютная постоянная, а $B > 0$ зависит только от $M$ и $\mu$.

Отсюда прежде всего вытекает, что существует общий предел

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n = a$$

и что

$$\left| f_{n^2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (79)$$

откуда, в частности,

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\,dz \longrightarrow a \lg 2 \qquad (n \longrightarrow \infty),$$

и, следовательно, в силу леммы 4

$$a = \frac{1}{\lg 2} \int_0^1 f_0(z)\,dz.$$

Пусть, наконец, $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$; так как в силу неравенства (79)

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n^2}(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

то на основании леммы 3

$$\frac{a-2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a+2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

или

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} = Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}},$$

где положено $A = 2Be^{\lambda}$. Это неравенство, установленное нами для достаточно больших $N$, можно, очевидно, при помощи надлежащего увеличения постоянной $A$ сделать справедливым для всех $N \geqslant 0$, чем теорема 33 и доказана полностью.

Возвращаясь теперь к проблеме Гаусса и полагая

$$f_n(x) = m'_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

мы имеем $f_0(x) \equiv 1$, вследствие чего выполнены все условия теоремы 33. Таким образом мы получаем:

$$\left| m'_n(x) - \frac{1}{(1+x)\lg 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{80}$$

откуда интегрированием находим:

$$\left| m_n(x) - \frac{\lg(1+x)}{\lg 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $A$ и $\lambda$ — абсолютные положительные постоянные. Этим, очевидно, не только доказано утверждение Гаусса, но найдена и хорошая оценка остаточного члена.

Применим теперь этот результат к оценке меры множества точек, для которых $a_n = k$, при больших значениях $n$. Так как, очевидно, условие $a_n = k$ равносильно неравенствам:

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leqslant \frac{1}{k},$$

то

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int\limits_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m'_{n-1}(x)\,dx,$$

откуда в силу неравенства (80)

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{n}{k}-\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2}\right|<\frac{A}{k(k+1)}e^{-\lambda\sqrt{n-1}}; \quad (81)$$

отсюда, в частности, для величины $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$, для которой нами в § 13 были установлены лишь довольно грубые неравенства, мы теперь получаем точное предельное соотношение:

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k}\to\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n\to\infty).$$

Так, например, мера множества точек, для которых $a_n=1$, стремится при $n\to\infty$ к величине

$$\frac{\lg 4-\lg 3}{\lg 2}.$$

Однако теорема 33 позволяет наряду с доказательством утверждения Гаусса получить и более общий, весьма важный результат, который нам понадобится в дальнейшем. Обозначим через $M_n(x)$ меру множества чисел, принадлежащих некоторому закреплённому интервалу ранга $k$ и удовлетворяющих, кроме того, условию $z_{k+n}<x$; иначе говоря, $M_n(x)$ есть мера множества чисел отрезка (0, 1), удовлетворяющих условиям:

$$a_1=r_1,\ a_2=r_2,\ \ldots,\ a_k=r_k;\ z_{k+n}<x, \qquad (82)$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — некоторые закреплённые натуральные числа, между тем как $n\geqslant 0$ и $x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ могут меняться как угодно.

Для выполнения условий (82), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a_1=r_1,\ a_2=r_2,\ \ldots,\ a_k=r_k;\ \frac{1}{r+x}<z_{k+n-1}\leqslant\frac{1}{r},$$

где $r$ — некоторое натуральное число. Отсюда следует:

$$M_n(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)-M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right)\right\} \quad (n\geqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1).$$

вследствие чего последовательность функций $M'_0(x)$, $M'_1(x), \ldots, M'_n(x), \ldots$ удовлетворяет уравнению (73).

Любое число $\alpha$ интервала $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k-1}}\right)$ может быть представлено в виде

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}},$$

или, так как $z_k = \frac{1}{r_{k+1}}$:

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}};$$

при $z_k < x$ число $\alpha$ должно быть заключено между $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}$, откуда

$$M_0(x) = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}\right| = \frac{x}{q_k(q_k + x q_{k-1})}. \qquad (83)$$

Полагая теперь

$$M_n(x) = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k\\ r_1, r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix}\chi_n(x) \quad (n \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1),$$

мы получим новую последовательность функций:

$$\chi_0(x), \ldots, \chi_1(x), \chi_n(x), \ldots;$$

при этом, очевидно, функции $\chi'_n(x)$, которые лишь постоянным множителем отличаются от соответствующих функций $M'_n(x)$, также удовлетворяют уравнению (73). Так как, очевидно,

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k\\ r_1, r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix} = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})},$$

то равенство (83) даёт нам:

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})x}{q_k + q_{k-1}x},$$

откуда

$$\chi_0'(x)=\frac{q_k(q_k+q_{k-1})}{(q_k+q_{k-1}x)^2}$$

и

$$\chi_0''(x)=-\frac{2q_kq_{k-1}(q_k+q_{k-1})}{(q_k+q_{k-1}x)^3};$$

таким образом

$$\frac{1}{2}<\chi_0'(x)<2,\quad |\chi_0''(x)|<4\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Это показывает, что к последовательности функций $\chi_n'(x)$ может быть применена теорема 33, причём числа $A$ и $\lambda$ оказываются абсолютно постоянными, т. е., в частности, независимыми от $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Мы получаем таким образом:

$$\chi_n'(x)=\frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, \ldots, k\\ r_1, & r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix}}=\frac{1}{(1+x)\lg 2}+\theta Ae^{-\lambda\sqrt{n}},\quad |\theta|<1;$$

интегрируя же это соотношение в пределах от $\frac{1}{r+1}$ до $\frac{1}{r}$, где $r$ — любое натуральное число, мы находим при $|\theta'|<1$:

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right)-M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, \ldots, k\\ r_1, & r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix}}=\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}+\frac{\theta' A}{r(r+1)}e^{-\lambda\sqrt{n}},$$

а так как, очевидно,

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right)-M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)=\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k, k+n+1\\ r_1, r_2, \ldots, r_k, r\end{pmatrix},$$

то

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k, k+n+1\\ r_1, r_2, \ldots, r_k, r\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}+\frac{\theta' Ae^{-\lambda\sqrt{n}}}{r(r+1)}\right)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k\\ r_1, r_2, \ldots, r_k\end{pmatrix}.$$

Наконец, мы можем суммировать это соотношение по некоторым (любым) из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$ в пределах от 1 до $\infty$. В результате такого суммирования соответствующие индексы просто исчезают в обеих частях соотношения, так что вместо ряда последовательных индексов $1, 2, \ldots, k$ мы получаем ряд совершенно произвольных индексов $n_1, n_2, \ldots, n_t$, причём во всех остальных своих чертах соотношение остаётся неизменным. Таким образом мы приходим к следующему предложению.

Теорема 34. *Существуют такие две абсолютные положительные постоянные $A$ и $\lambda$, что при $n_1 < n_2 < \ldots \ldots < n_t < n_{t+1}$ и при любых целых положительных $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$*

$$\left| \frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_t, n_{t+1} \\ r_1, r_2, \ldots, r_t, r \end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_t \\ r_1, r_2, \ldots, r_t \end{pmatrix}} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right| < \frac{A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}}.$$

Этот результат показывает, что не только мера множества чисел отрезка $(0, 1)$, для которых $a_n = r$, стремится при $n \to \infty$ к определённому пределу, но что к тому же самому пределу стремится и относительная мера множества удовлетворяющих этому условию чисел при любых закреплённых значениях любой группы предшествующих элементов.

## § 16. Средние значения

Результаты предыдущего параграфа дают нам возможность доказать следующее общее предложение.

Теорема 35. *Пусть $f(r)$ — неотрицательная функция натурального аргумента $r$, и пусть существуют такие положительные постоянные $C$ и $\delta$,* что

$$f(r) < C r^{\frac{1}{2} - \delta} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

*Тогда для всех чисел отрезка* (0,1), *за исключением самое большее множества меры нуль,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)=\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}. \qquad (84)$$

Предварительное замечание. Сходимость ряда в правой части равенства (84) вытекает, разумеется, из условия, наложенного на функцию $f(r)$.

*Доказательство.* Положим:

$$\int_0^1 f(a_k)\,d\alpha=u_k,\quad \int_0^1 \{f(a_k)-u_k\}^2\,d\alpha=b_k,$$

$$\int_0^1 \{f(a_i)-u_i\}\{f(a_k)-u_k\}\,d\alpha=g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(a_k)-u_k\}=s_n=s_n(\alpha).$$

Существование всех написанных интегралов легко вытекает из предположенных свойств функции $f(r)$. В самом деле, так как

$$\{f(r)\}^2<C^2r^{1-2\delta},$$

то

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha=\sum_{r=1}^{\infty}\{f(r)\}^2\,\mathfrak{M}E\left(\begin{matrix}k\\ r\end{matrix}\right)<2C^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^{1-2\delta}}{r^2}=C_1$$

имеет смысл, откуда на основании неравенства Буняковского — Шварца легко следует существование и всех написанных выше интегралов. В частности, отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} b_k&=\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha-u_k<C_1,\\ u_k&=\int_0^1 f(a_k)\,d\alpha<\sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\,d\alpha}<\sqrt{C_1}.\end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Далее, мы, очевидно, имеем при $k>i$:

$$g_{ik}=\int_0^1 f(a_i)\,f(a_k)\,dx-u_iu_k=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\,f(s)\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix}-u_iu_k. \quad (86)$$

Но в силу теоремы 34 и заключительных неравенств § 12

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix}-\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\right|<$$

$$<\frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}<$$

$$<3\,Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}, \quad (87)$$

и

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}-\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\lg 2}\right|<$$

$$<\frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)}<3Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Умножая же неравенство (88) на $\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}$ и сопоставляя полученный результат с неравенством (87), мы находим:

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, & k \\ r, & s \end{pmatrix}-\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}\right|<$$

$$<6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix},$$

вследствие чего соотношение (86) даёт нам:

$$\left|g_{ik}-\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\,f(s)\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}+u_iu_k\right|<$$

$$<6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)\,f(s)\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix};$$

замечая, что

$$\sum_{r,\, s=1}^{\infty} f(r)\, f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\mathfrak{M}E\binom{k}{s} = u_i u_k$$

и пользуясь для оценки правой части вторым неравенством (85), мы получаем отсюда:

$$|g_{ik}| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, u_i u_k < 6AC_1 e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \qquad (89)$$

Пользуясь оценками (85) и (89), мы находим для $n > m > 0$:

$$\int_0^1 (s_n - s_m)^2\, d\alpha = \int_0^1 \Big\{ \sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k) \Big\}^2 d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\, d\alpha +$$

$$+ 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\, \{f(a_k) - u_k\}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} < C_1(n-m) +$$

$$+ 12AC_1 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2\,(n-m), \qquad (90)$$

где $C_2$ — некоторая новая положительная постоянная.

Обозначим теперь через $e_n$ множество чисел отрезка (0, 1), для которых

$$|s_n| \geqslant \varepsilon n,$$

где $\varepsilon$ — любое заданное постоянное положительное число. Очевидно,

$$\int_0^1 s_n^2\, d\alpha \geqslant \int_{e_n} s_n^2\, d\alpha \geqslant \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_n,$$

вследствие чего неравенство (90) (при $m=0$) даёт:

$$\mathfrak{M}e_n \leqslant \frac{\int\limits_0^1 s_{n^2}^2\,dx}{\varepsilon^2 n^4} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}.$$

Таким образом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}e_{n^2}$$

сходится, и, следовательно, как мы знаем, почти всякое число отрезка (0, 1) принадлежит не более чем конечному числу множеств $e_{n^2}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Это значит, что для почти всех чисел отрезка (0, 1) при достаточно большом $n$

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon;$$

а так как $\varepsilon$ произвольно мало, то почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0. \qquad (91)$$

Далее, для $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$ формула (90) даёт:

$$\int\limits_0^1 (s_N - s_{n^2})\,d\alpha < C_2(N-n^2) < C_2(2n+1) \leqslant 3C_2 n.$$

Обозначая через $e_{n,N}$ множество чисел отрезка (0, 1), для которых $|s_N - s_{n^2}| \geqslant \varepsilon n^2$, и полагая

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n,N} = E_n,$$

мы будем поэтому иметь для $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$:

$$\int\limits_0^1 (s_N - s_{n^2})^2\,d\alpha \geqslant \int\limits_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2\,d\alpha > \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M}e_{n,N},$$

$$\mathfrak{M}e_{n,N} < \frac{3C_2}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M}E_n \leqslant \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M}e_{n,N} < \frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leqslant \frac{9C_2}{\varepsilon^2 n^2},$$

вследствие чего ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$ сходится. Почти всякое число отрезка (0, 1) принадлежит, следовательно, как мы знаем, не более чем конечному числу множеств $E_n$, а значит и не более чем конечному числу множеств $e_{n, N}$. Но это означает, что почти все числа отрезка (0, 1) при достаточно большом $n$ и при $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$ удовлетворяют соотношению:

$$|s_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2.$$

Иначе говоря, почти всюду при достаточно большом $n$ и $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$

$$\frac{|s_N - s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon;$$

а так как $\varepsilon$ произвольно мало, то почти всюду

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0 \qquad [n \to \infty, \ n^2 \leqslant N < (n+1)^2].$$

В силу же соотношения (91) отсюда, очевидно, следует, что почти всюду

$$\frac{s_N}{n^2} \to 0 \qquad [n \to \infty, \ n^2 \leqslant N < (n+1)^2],$$

а значит и подавно

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Иначе говоря, почти всюду

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \to 0 \qquad (N \to \infty). \tag{92}$$

Но в силу формулы (81) предыдущего параграфа

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg \left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M} E \binom{k}{r} - \frac{\lg \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\lg 2} \right| < A e^{-\lambda \sqrt{k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 e^{-\lambda \sqrt{k}},$$

где $A_1$ — новая положительная постоянная. Поэтому

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (k \to \infty),$$

а следовательно, и

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (N \to \infty).$$

Вследствие этого соотношение (92) даёт нам:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2}$$

почти всюду в отрезке (0, 1), чем и доказывается теорема 35.

Доказанное предложение позволяет установить целый ряд свойств цепных дробей, выполняющихся для почти всех иррациональностей. Положим, например,

$$f(r)=1 \text{ для } r=k \text{ и } f(r)=0 \text{ для } r \neq k,$$

где $k$ — некоторое (любое) натуральное число. Очевидно, что в этом случае сумма

$$\psi_n(k)=\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

представляет собою число, показывающее, сколько раз встречается число $k$ среди $n$ первых элементов данной цепной дроби. Отношение же

$$\frac{\psi_n(k)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

даёт нам как бы *плотность* числа $k$ среди первых $n$ элементов этой цепной дроби; наконец, предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(k)}{n}=d(k),$$

если он существует, естественно интерпретировать как *плотность числа $k$ на всём ряде элементов данной цепной дроби.*

Так как определённая нами функция $f(r)$ удовлетворяет, очевидно, всем требованиям теоремы 35, то в силу этой теоремы мы заключаем, что *для любого $k$ эта плотность почти всюду существует и почти всюду одна и та же.* Более того, та же теорема даёт возможность вычислить величину этой плотности; очевидно, мы имеем почти всюду:

$$d(1)=\frac{\lg 4-\lg 3}{\lg 2}, \quad d(2)=\frac{\lg 9-\lg 8}{\lg 2}, \quad d(3)=\frac{\lg 16-\lg 15}{\lg 2},$$

и т. д. Таким образом любое натуральное число встречается в качестве элемента в среднем одинаково часто в разложениях почти всех чисел.

Другой интересный результат мы получаем, полагая

$$f(r)=\lg r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots);$$

очевидно, что все условия теоремы 35 при этом выполнены; поэтому мы находим, что почти всюду

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg a_i \longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty}\lg r\,\frac{\lg\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \qquad (n\longrightarrow\infty),$$

или, что то же,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\longrightarrow\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\lg r}{\lg 2}}.$$

Таким образом *среднее геометрическое первых $n$ элементов почти всюду стремится при $n\longrightarrow\infty$ к абсолютной постоянной*

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\lg r}{\lg 2}}=2,6\ldots$$

Очевидно, что теорема 35 позволяет установить аналогичные результаты и для целого ряда других сред-

них. Но что касается среднего арифметического

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{93}$$

то его исследование этим методом невозможно, так как соответствующая функция $f(r)=r$ не удовлетворяет условиям теоремы 35. Однако легко усмотреть из более элементарных соображений, что выражение (93) почти всюду никакого конечного предела иметь не может. В самом деле, в силу теоремы 30 (§ 13) мы имеем почти всюду для бесчисленного множества значений $n$

$$a_n > n \lg n,$$

а значит и подавно

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \lg n, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i > \lg n.$$

Таким образом величина (93) почти всюду является неограниченной, а потому, как мы и утверждали, не может иметь конечного предела.